



Politechnika Łódzka
Instytut Informatyki

**PRACA DYPLOMOWA
INŻYNIERSKA**

**Aproksymacja entalpii pary wodnej w zależności
od temperatury i ciśnienia na podstawie danych
pomiarowych**

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej
Promotor: prof.dr hab. Volodymyr Yemyets
Dyplomant: Jakub Ratkiewicz
Nr albumu: 147 136
Kierunek: Informatyka
Specjalność: Inżynieria oprogramowania

Łódź 14 luty 2011



Instytut Informatyki

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215, budynek E9
tel. 042 631 27 97, 042 632 97 57, fax 042 630 34 14 email: office@ics.p.lodz.pl

WSTĘP	3
1 Pojęcia podstawowe	4
1.1 Energia wewnętrzna	4
1.2 Ciepło właściwe	5
1.3 Entalpia.....	5
1.4 Entropia	6
2 Ciepłne maszyny przepływowe.....	7
2.1 Turbina parowa.....	7
2.2 Wymiennik ciepła.....	9
2.3 Kocioł parowy	10
3 Woda i para wodna	11
3.1 Przemiany fazowe H ₂ O.....	11
3.2 Zmiana entalpii H ₂ O podczas przemian fazowych.....	13
4 Charakterystyka metod określania własności pary wodnej.....	15
4.1 Metoda odczytu z tablic pary wodnej	15
4.2 Metoda odczytu z wykresów	16
4.3 Metoda obliczania z zależności aproksymacyjnych.....	17
5 Aproksymacja	19
5.1 Aproksymacja wielomianowa.....	19
5.2 Wielomiany ortogonalne	20
5.3 Wielomian ortogonalny na zbiorze dyskretnym.....	22
IMPLEMENTACJA ALGORYTMU	23
1 Dane pomiarowe.....	23
1.1 Wykres entalpii w funkcji temperatury i ciśnienia	26
2 Budowa funkcji aproksymującej entalpię na podstawie danych pomiarowych.....	26
2.1 Budowa funkcji aproksymującej zależność ciśnienia od temperatury dla linii przemiany woda-para.....	27
2.2 Budowa funkcji aproksymującej entalpię pary wodnej nasyconej w zakresie ciśnień od 0,01 do 40 bar.....	30
2.3 Budowa funkcji aproksymującej entalpię pary wodnej nasyconej w zakresie ciśnień od 40 do 800 bar.....	48
2.4 Budowa funkcji aproksymującej entalpię pary wodnej nasyconej w zakresie ciśnień od 40 do 800 bar przy temperaturach niższych od 500°C	58
2.5 Budowa funkcji scalającej.....	66

3 Bibliografia i załączniki.....	69
ZAKOŃCZENIE.....	70

WSTĘP

Celem niniejszej pracy jest zbudowanie algorytmu obliczeniowego entalpii pary wodnej w zależności od temperatury i ciśnienia. Entalpia pary wodnej jest jej własnością fizyczną którą najprościej można by porównać do potencjału ładunku elektrycznego. Oznacza to że im większa jest wartość entalpii tym większą pracę jest w stanie wykonać para wodna. Widać więc że znajomość entalpii ma ogromne znaczenie praktyczne i jest niezbędna w obliczeniach bilansów energetycznych takich maszyn jak kotły, turbiny, wymienniki ciepłe itp. Maszyny te są powszechnie używane w energetyce i to nie tylko tej konwencjonalnej. Zauważyć należy że w najnowocześniejszych nawet elektrowniach atomowych, reakcje jądrowe są jedynie paliwem zastępującym węgiel, czynnikiem roboczym jest w nich jednak cały czas para wodna.

Wyznaczyć entalpię jednak nie jest tak łatwo jak zmierzyć potencjał elektryczny, który jest proporcjonalny do wielkości siły odchylającej listki w elektroskopie lub wielkości próbnego prądu przepływającego przez woltomierz. Entalpia zależy jednocześnie od temperatury i ciśnienia i nie jest to zależność wprost proporcjonalna, wręcz przeciwnie zmienia się a niekiedy nawet odwraca tendencje wykazując raz spadek raz wzrost wartości. Nie można zatem zbudować prostego mechanicznego miernika który pokazywałby bezpośrednio wartość entalpii pary wodnej. Stosunkowo proste i powszechne używane są jednakże mierniki temperatury i ciśnienia. Mając odczytane za ich pomocą wartości możemy zatem wyznaczyć entalpię posługując się tablicami lub specjalnymi wykresami. Postępowanie takie było do niedawna jedynym sposobem wyznaczania entalpii jednakże obecnie coraz częściej stosuje się w tym celu maszyny cyfrowe wyposażone w odpowiednie algorytmy obliczeniowe.

Obecnie w Internecie odnaleźć można wiele stron oferujących on-line kalkulatory obliczeniowe gdzie po wprowadzeniu temperatury i ciśnienia otrzymać można wartość entalpii. Jednakże ściągnięcie tych aplikacji najczęściej jest płatne i obwarowane umowami licencyjnymi. Celem mojej pracy jest utworzenie aplikacji w języku Visual Basic która umożliwi szybkie i płynne obliczanie entalpii w zależności od podanej temperatury i ciśnienia. Aplikację tę stosować można będzie także jako „funkcję użytkownika” w arkuszu kalkulacyjnym Excel gdzie podając w argumentach zamiast danych liczbowych odniesienia do odpowiednich komórek przeliczać można będzie całe tabele danych oraz tworzyć na ich podstawie wykresy.

1 Pojęcia podstawowe

1.1 Energia wewnętrzna

Energia wewnętrzna (oznaczana zwykle jako U lub E_w) jest to część energii układu, która jest uzależniona jedynie od jego stanu wewnętrznego, stanowi ona sumę oddziaływania międzycząsteczkowego, wewnątrz cząsteczkowego i energii ruchu cieplnego.

Energia wewnętrzna układu obejmuje energię wszystkich rodzajów ruchu mikroskopowych składników układu (atomów, cząsteczek, jonów itp.) oraz energię wzajemnego oddziaływania tych składników. A więc w skład energii wewnętrznej układu wchodzi:

- energia kinetyczna ruchu postępowego i obrotowego drobin
- energia ruchu drgającego atomów w drobinie
- energia potencjalna wzajemnego oddziaływania drobin
- energia stanów elektronowych
- energia chemiczna, związana z możliwością przebudowy drobin
- energia jądrowa (związana z równoważnością masy i energii)

Wartość energii wewnętrznej jest trudna do ustalenia ze względu na jej złożony charakter. W opisie procesów termodynamicznych istotniejsza i łatwiejsza do określenia jest zmiana energii wewnętrznej, dlatego określając energię wewnętrzną układu pomija się te rodzaje energii, które nie zmieniają się w rozpatrywanym układzie termodynamicznym.

Do wykonania typowych obliczeń technicznych z reguły wystarcza znajomość przyrostów energii podczas przemian termodynamicznych, a nie całkowitej energii układu, określonej z uwzględnieniem wszystkich wyżej wymienionych składników. Dlatego też stan odniesienia, dla którego energia wewnętrzna ciała jest przyjmowana jako równa zero, można przyjąć dowolnie. W obliczeniach dotyczących fizycznych przemianach termodynamicznych nie ma potrzeby uwzględniania tych składników energii wewnętrznej, które nie ulegają zmianie podczas analizowanego procesu, np. energii jądrowej i energii chemicznej. W termodynamice technicznej istotna jest ta część energii wewnętrznej układu, której zmiana związana jest ze zmianą jego temperatury.

1.2 Ciepło właściwe

Ciepło właściwe rozumiemy zwykle jako stosunek ilości ciepła pobranego przez jednostkową masę substancji do zmiany temperatury wywołanej pobraniem tego ciepła.

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \quad (1)$$

Należy zdawać sobie sprawę, że definicja ta oraz wzór (1), przydatny w rozwiązywaniu prostych zadań, są zależnościami przybliżonymi – w rzeczywistości ilość przekazywanego ciepła nie jest proporcjonalna do zmiany temperatury układu. Ścisłej ciepło właściwe definiuje się jako

$$c(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{d}{dT} \left(\frac{Q}{m} \right) \quad (2)$$

Ciepło właściwe występujące we wzorze (1) należy więc rozumieć jako średnie ciepło właściwe dla rozpatrywanego zakresu temperatur.

Ciepło właściwe jest jedną z najważniejszych właściwości charakteryzujących układy termodynamiczne. Jego wartość zależy w istotny sposób od rodzaju substancji, od jej stanu skupienia oraz od rodzaju przemiany termodynamicznej zachodzącej podczas przekazywania ciepła. W związku z tym rozróżnia się m. in. ciepło właściwe izobaryczne (przy stałym ciśnieniu) c_p oraz ciepło właściwe izochoryczne (przy stałej objętości) c_v . Dla cieczy i ciał stałych różnica pomiędzy wartościami c_p i c_v jest niewielka (nie przekracza kilku %), natomiast dla gazów wartości c_p i c_v wyraźnie się różnią.

1.3 Entalpia

Obok energii wewnętrznej duże znaczenie w termodynamice ma pokrewna funkcja stanu wprowadzona przez Gibbsa i nazwana entalpią. Definiuje się ją za pomocą równania zwanego wzorem Gibbsa.

$$I = U + pV$$

$$i = u + pv \quad (3)$$

Gdzie U, I - energia wewnętrzna i entalpia, u, i - właściwa energia wewnętrzna i entalpia, p – bezwzględne ciśnienie statyczne, V, v całkowita i właściwa objętość ciała. Entalpia jest funkcją tych samych parametrów stanu co energia wewnętrzna.

Z powyższego wzoru wynika sens fizyczny entalpii. Entalpia jest równa sumie energii wewnętrznej, czyli energii jaka jest potrzebna do utworzenia układu gdy jest on tworzony w otoczeniu próżni oraz iloczynu pV , który jest równy pracy jaką należy wykonać nad otoczeniem by w danych warunkach uzyskać miejsce na układ.

Nieskończenie małą zmianę entalpii określa wzór:

$$dI = dU + pdV + Vdp \quad (4)$$

Dla procesów, zachodzących dla ciał stałych i cieczy pod niezbyt dużym ciśnieniem składniki pdV i Vdp są małe w porównaniu do dU i mogą być pominięte, wówczas zmiana entalpii jest równa zmianie energii wewnętrznej.

Gdy układ nie wykonuje pracy nieobjętościowej oraz gdy ciśnienie jest stałe, wówczas zmiana entalpii jest równa ciepłu dostarczonemu do układu¹

1.4 Entropia

Wszystkie procesy zachodzące w przyrodzie samorzutnie (bez udziału czynników zewnętrznych) przebiegają w jednym kierunku i są nieodwracalne. Kierunek ten jest kierunkiem zmniejszania bodźca wywołującego proces. Na przykład samorzutne przechodzenie ciepła od ciała o temperaturze wyższej do ciała o temperaturze niższej zachodzi do wyrównania temperatur, co jest równoznaczne z zanikiem bodźca powodującego ten proces.

Zjawisko odwrotne przechodzenie ciepła od ciała o temperaturze niższej do ciała o temperaturze wyższej nigdy samorzutnie nie zajdzie. Analogicznie można rozpatrzeć przepływ gazu pod wpływem różnicy ciśnień, czy dyfuzję spowodowaną różnicą stężeń. Odwrotny kierunek tych procesów jest niemożliwy bez wywołania zmian w otoczeniu. Wszystkie te procesy ustaną, kiedy znikną bodźce i układ znajdzie się w stanie równowagi.

¹ „Termodynamika” – Jan Szargut - PWN W-wa 1975

Najogólniejsze sformułowanie II zasady termodynamiki dotyczy kierunku przebiegu procesów i mówi, że wszelkie procesy przebiegają w sposób nieodwracalny.

Dla procesów związanych z energią cieplną można stwierdzić, że samorzutne przejście ciepła od ciała chłodniejszego do cieplejszego jest niemożliwe

Do ilościowego ujęcia II zasady termodynamiki wprowadza się nową funkcję termodynamiczną - entropię.

Zmiana entropii jest dodatnia, gdy ciału jest dostarczane ciepło (z otoczenia), ujemna - gdy ciało oddaje ciepło (do otoczenia). Zmiany entropii zależą od tego, czy proces zachodzi w sposób odwracalny, czy nieodwracalny.

Ogólnie dla procesów odwracalnych i nieodwracalnych możemy napisać:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad (5)$$

pamiętając, że znak $>$ dotyczy procesów nieodwracalnych, a znak $=$ procesów odwracalnych².

2 Ciepłe maszyny przepływowe

Maszynami cieplnymi są maszyny przepływowe o przepływie ciągłym (maszyny wirnikowe) lub okresowym (maszyny tłokowe), jeżeli wewnątrz maszyny występuje istotna zmiana temperatury czynnika roboczego. Przykładami maszyn przepływowych są: sprężarki i turbiny.

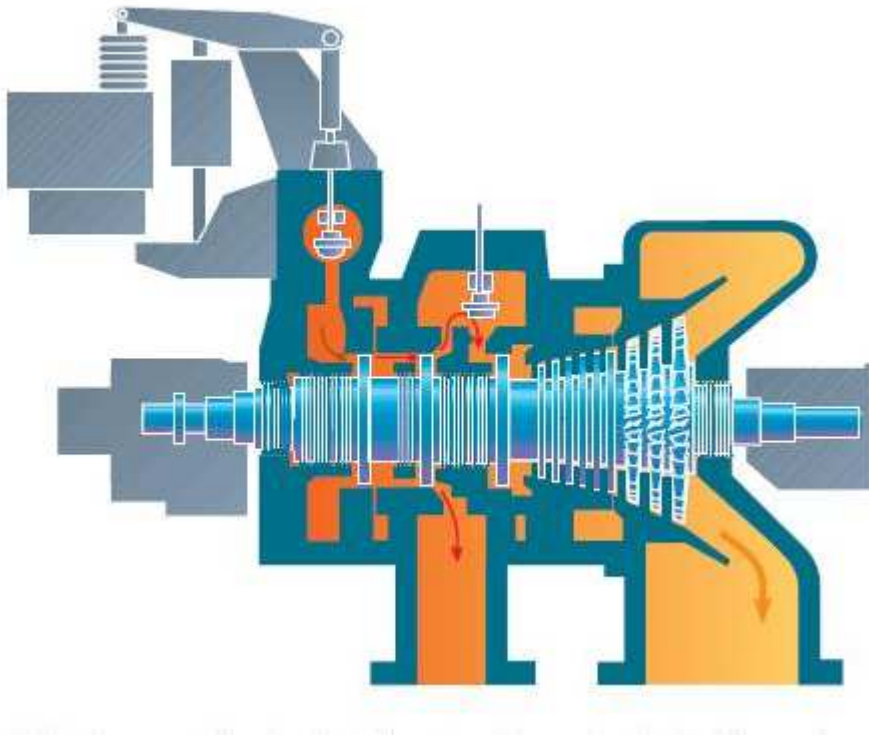
2.1 Turbina parowa

Przepływ gazu przez turbinę wiąże się ze spadkiem jego entalpii (energii potencjalnej). W myśl zasady zachowania energii entalpia ta zamieniana jest w inną formę energii, a konkretnie w energię mechaniczną odprowadzaną wałem do maszyny napędzanej. Z drugiej zasady termodynamiki wynika, że nie można skonstruować silnika cieplnego w całości zamieniającego dostarczone ciepło na pracę, co w praktyce oznacza, że turbiny parowe oprócz użytecznej pracy zawsze oddają do otoczenia

² „Termodynamika” – Jan Szargut - PWN W-wa 1975

ciepło, które jeśli nie jest wykorzystane, staje się ciepłem odpadowym. Stanowi to podstawę skojarzonego wytwarzania energii elektrycznej i ciepła w elektrociepłowniach.

Poniższy rysunek pokazuje przekrój 2-stopniowej turbiny parowej z upustem. Część pary „świeżej” zasilającej maszynę po przejściu przez łopatki 1-stopnia turbiny może (ale nie musi) być skierowana do upustu z którego kieruje się ją do innych urządzeń jako tzw. „parę technologiczną”. Pozostała para przechodzi przez łopatki 2-stopnia turbiny gdzie ulega całkowitemu rozprężeniu i wychodzi w postaci „kondensatu”



Rys. 1 Schemat 2-stopniowej turbiny parowej z upustem pary

Moc turbiny bez upustów regeneracyjnych określa się wzorem:

$$P = G \cdot \left(i_0 - \left(i_2 + \frac{c_2^2}{2} \right) \right) \cdot \eta_m \quad (6)$$

gdzie:

P – moc, [W],

G – wydatek masowy, [kg/s],

i_0 – entalpia pary na wlocie do turbiny, [J/kg],

i_2 – entalpia pary na wylocie z turbiny, [J/kg],

c_2 – prędkość pary na wylocie z turbiny, [m/s]

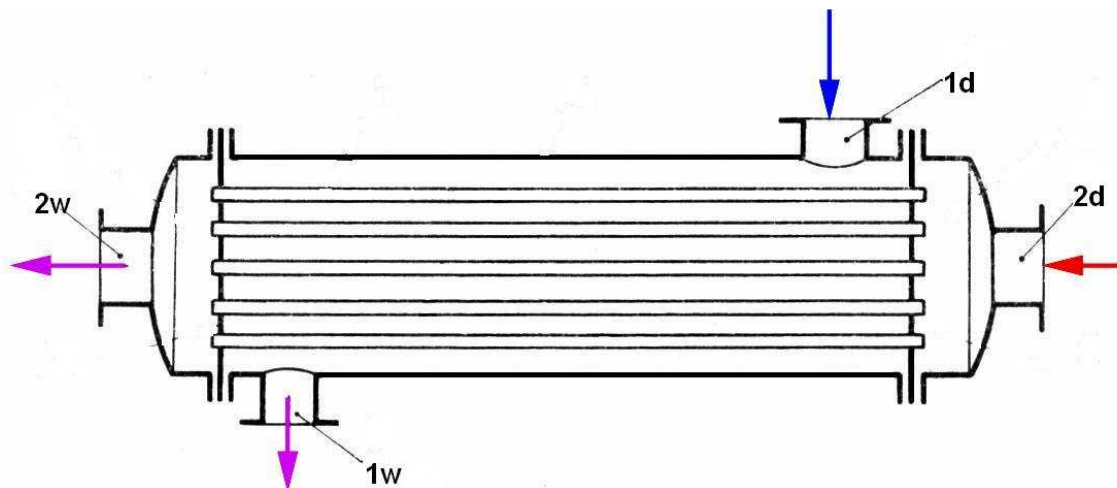
η_m – sprawność mechaniczna.

Jak wynika ze wzoru (4) znajomość entalpii pary wodnej ma kluczowe znaczenia w obliczeniach inżynierskich.

2.2 Wymiennik ciepła

Do najprostszych a jednocześnie najszerzej stosowanych przepływowych urządzeń energetycznych należą wymienniki ciepła.

Poniższy schemat przedstawia prosty wymiennik ciepła w którym schładzamy jedną a ogrzewamy drugą z przepływających przez niego substancji



Rys. 2 Schemat Wymiennika cieplnego

Tutaj utaj też znajomość entalpii jest kluczowa w obliczeniach bilansu przemian zachodzących w wymienniku

$$G_1 \cdot i_{1d} + G_2 \cdot i_{2d} = G_1 \cdot i_{1w} + G_2 \cdot i_{2w} + Q_{ot} \quad (7)$$

gdzie:

G – wydatek masowy, [kg/s],

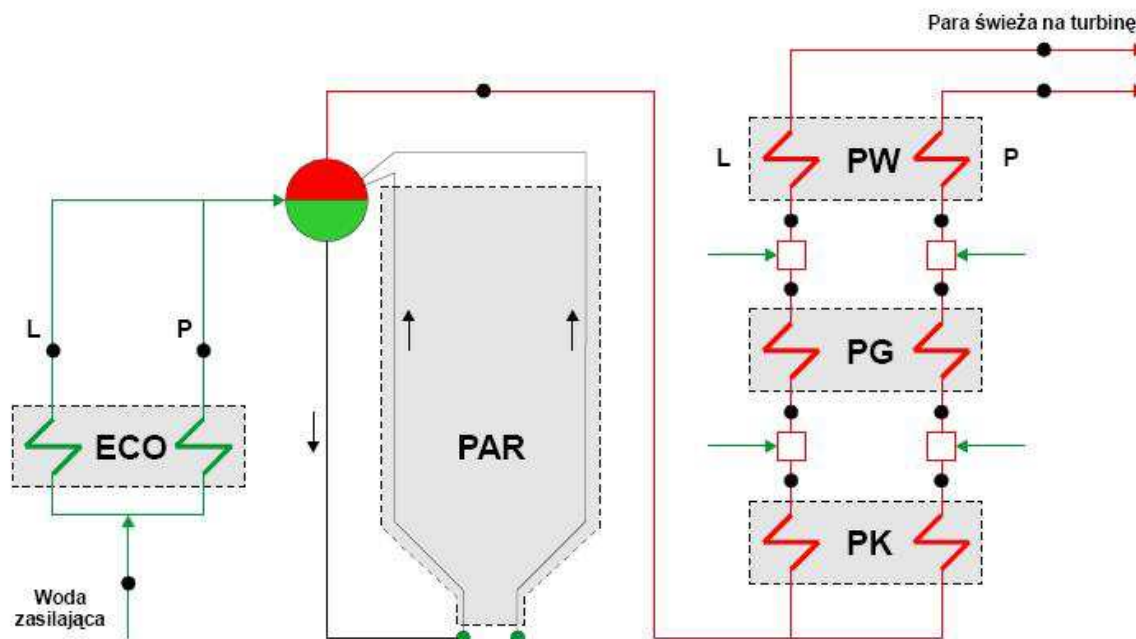
i – entalpia pary wody lub kondensatu, [J/kg],

Q_{ot} – strumień ciepła traconego do otoczenia, [J],

2.3 Kocioł parowy

Przepływ czynnika ogrzewanego (woda – para wodna) w kotle

Poniższy schemat przedstawia budowę kotła parowego. Szczegółowy opis symboli i zasady działania zamieszczam pod rysunkiem



Rys. 3 Schemat przepływu wody i pary wodnej w kotle

Woda zasilająca włączana do kotła za pomocą pompy zasilającej przepływa przez podgrzewacz wody ECO podzielony na dwie strony – lewą i prawą. Następnie podgrzana woda przepływa do walczaka. Woda z walczaka za pomocą sześciu centralnych rur opadowych sprowadzana jest do komór dolnych ekranów i rozdzielana jest na cztery ściany komory paleniskowej. W wyniku dalszego ogrzewania w rurach ekranowych komory paleniskowej (parownik) część wody ulega odparowaniu. Na skutek różnicy gęstości mieszanina wodno-parowa unosi się ku górze i przepływa do górnych komór zbiorczych, skąd jest kierowana do walczaka. Woda, oddzielona od pary wodnej, ponownie przepływa grawitacyjnie do parownika, natomiast para wodna płynie na trzystopniowy przegrzewacz. Po rozdzieleniu na dwie nitki (lewa i prawa) para wodna przepływa kolejno przez przegrzewacz konwekcyjny (PK), następnie przegrzewacz grodziowy (PG) i ostatni stopień przegrzewu – przegrzewacz wylotowy

(PW). Pomiędzy pierwszym i drugim oraz drugim i trzecim stopniem przegrzewacza znajdują się wtryskowe regulatory temperatur pary przegrzanej

Wyznaczenie sprawności kotła metodą bezpośrednią³

$$\eta_k = \frac{G \cdot (i_p - i_w)}{B \cdot Q_w} \cdot 100\% \quad (8)$$

gdzie:

G – strumień masy pary wytwarzanej w kotle (wydajność kotła), [kg/s]

i_p – entalpia pary przegrzanej, kJ/kg;

i_w – entalpia wody zasilającej, kJ/kg;

B – strumień masy spalanego paliwa, kg/s;

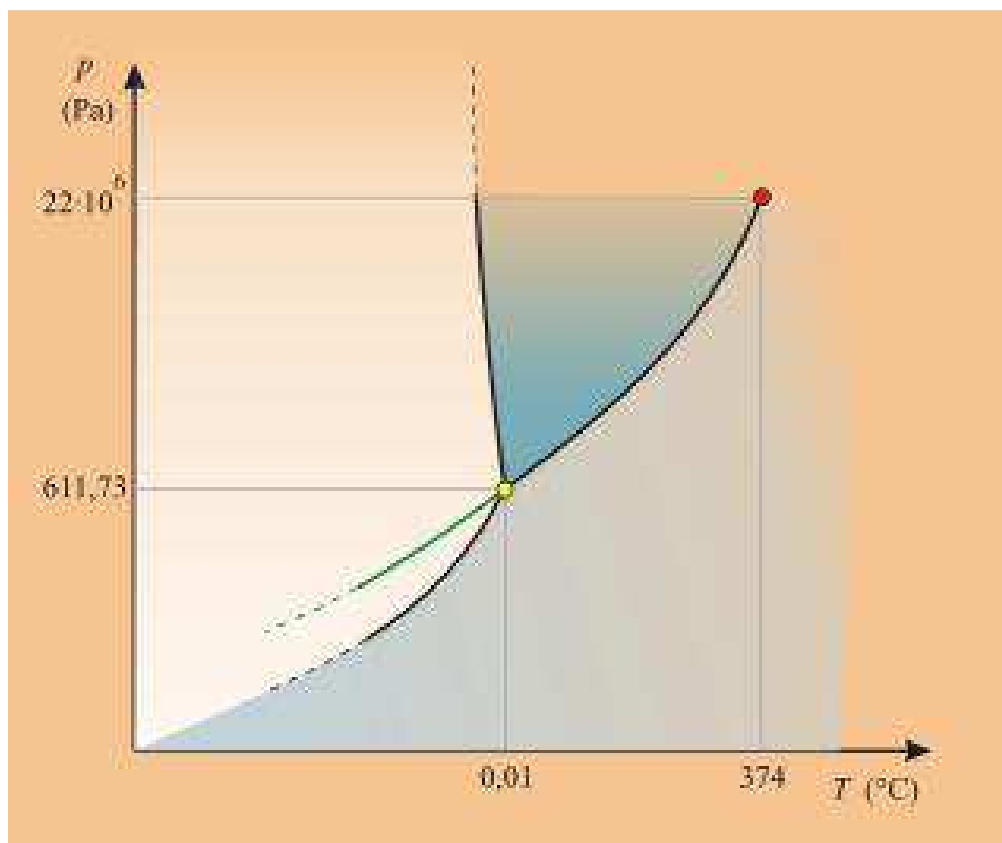
Q_w – wartość opałowa paliwa, kJ/kg.

3 Woda i para wodna

3.1 Przemiany fazowe H₂O

Poniższy rysunek przedstawia różne stany skupienia substancji chemicznej danej wzorem H₂O zwane lodem, wodą lub parą w zależności od ich ciśnienia i temperatury. Widzimy z wykresu że stan skupienie można jednoznacznie określić znając jednocześnie temperaturę i ciśnienie substancji. Wyjątkiem są linie przemiany gdzie substancja może znajdować się jednocześnie w dwóch stanach jednocześnie a na styku tych linii nawet w trzech

³ „Badanie kotła parowego” dr inż. Andrzej Tatarek - Zakład Miernictwa i Ochrony Atmosfery, Wrocław, grudzień 2006r.



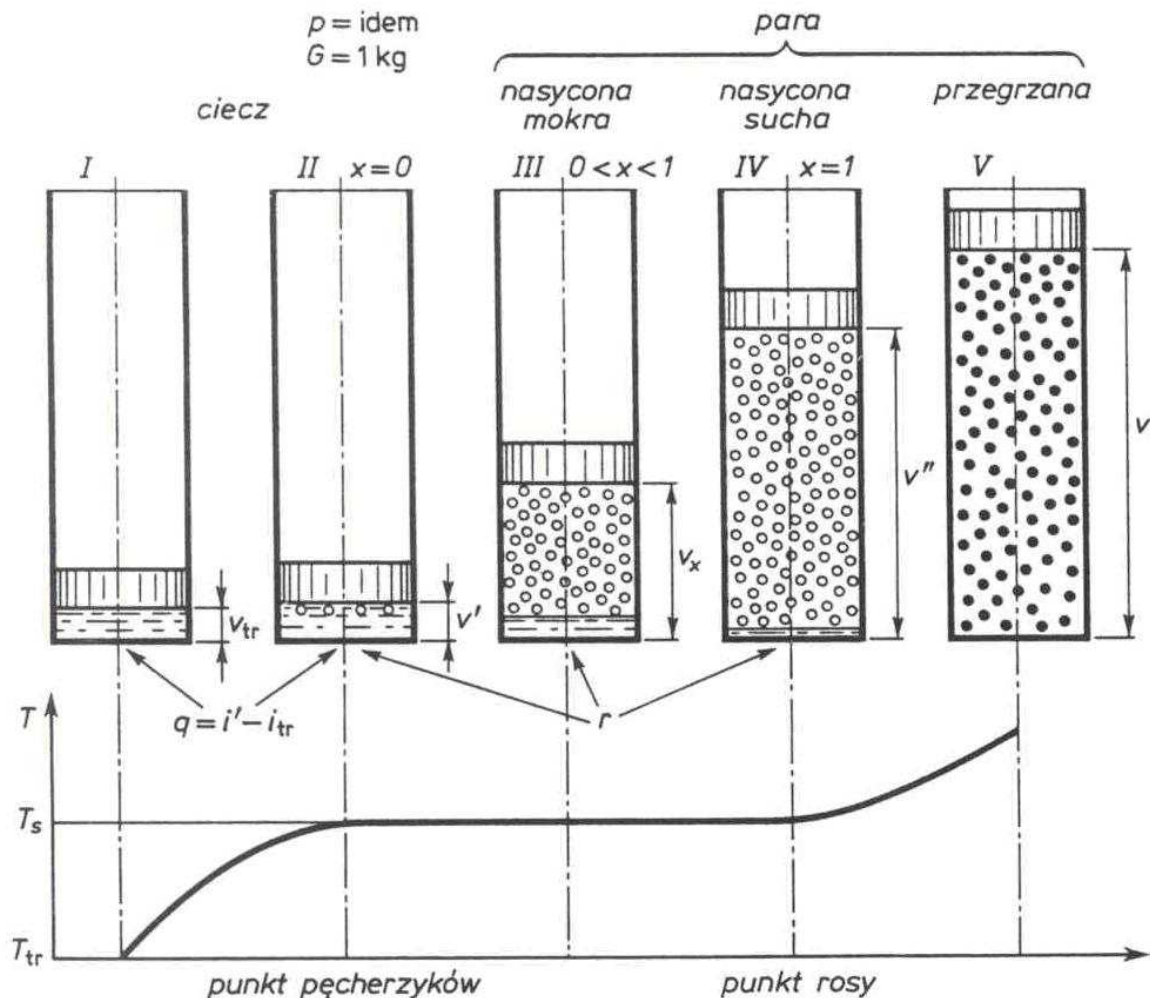
Rys. 4 Diagram fazowy wody z zaznaczonym punktem potrójnym i krytycznym

Punkt potrójny – stan, w jakim dana substancja może istnieć w trzech stanach skupienia równocześnie w równowadze termodynamicznej. Punkt ten określony jest przez temperaturę i ciśnienie punktu potrójnego. Na diagramie fazowym, ukazującym zależności ciśnienia od temperatury stanów równowagi faz, jest to punkt przecięcia krzywych równowagi fazowej substancji odpowiadający stanowi równowagi trwałej trzech stanów skupienia (ciało stałe, ciecz, gaz).

Punkt krytyczny wody (temperatura krytyczna wody) to temperatura, powyżej której faza lotna wody staje się gazem. W stanie krytycznym ciepło parowania oraz napięcie powierzchniowe wody są równe zero. Powyżej temperatury krytycznej niemożliwe jest skroplenie wody, bez względu na ciśnienie.

3.2 Zmiana entalpii H₂O podczas przemian fazowych

Poniższy rysunek przedstawia to co dzieje się z substancją H₂O w dowolnym punkcie na linii przemiany woda para jeżeli do substancji w stanie ciekłym dodawać będziemy stopniowo energię cieplną i utrzymywać będziemy stałe jej ciśnienie.



Rys. 5 Przemiana fazowa wody w parę nienasyconą = przeznaczoną

Przy niezmiennym ciśnieniu zmiana wody o stanie początkowym odpowiadającym punktowi pęcherzyków w parę nasyconą suchą odbywa się w stałej temperaturze. Tak samo zachowują się inne jednoskładnikowe ciecze.

Para mokra (nasycona mokra) zawiera dwie fazy: ciekłą i lotną. Fazą ciekłą jest woda o stanie punktu pęcherzyków. Fazą lotną jest para nasycona sucha. Stopień suchości pary mokrej (pary nasyconej mokrej) oblicza się ze wzoru

$$x = \frac{m''}{m} = \frac{m''}{m' + m''} \quad (9)$$

m'' – ilość pary nasyconej suchej w parze mokrej, kg

m' – ilość cieczy o stanie punktu pęcherzyków w parze mokrej, kg

m – ilość pary mokrej, kg

Ciepło (entalpia) parowania dla procesu izobarycznego

$$r = i'' - i' = T_s (s'' - s') \quad (10)$$

i'' – entalpia właściwa pary nasyconej suchej, [kJ/kg]

i' – entalpia cieczy w punkcie pęcherzyków, [kJ/kg]

Przyjmuje się, że woda ma energię wewnętrzną i entropię równą zero w stanie ciekłym dla parametrów punktu potrójnego:

$$p_{tr} = 611,2 \text{ Pa}$$

$$T_{tr} = 273,16 \text{ K (0,01°C)}$$

1 kg pary mokrej składa się z $1-x$ kg cieczy w stanie punktu pęcherzyków oraz x kg pary nasyconej suchej. Stąd objętość właściwą, entalpię właściwą i entropię właściwą pary mokrej wyznacza się odpowiednio z zależności

$$v_x = (1-x)v' + xv'' = v' + x(v'' - v') \quad (11)$$

$$i_x = (1-x)i' + xi'' = i' + x(i'' - i') \quad (12)$$

$$s_x = (1-x)s' + xs'' = s' + x(s'' - s') \quad (13)$$

Energia wewnętrzna właściwa pary (nasyconej) mokrej

$$u_x = i_x - pv_x \quad (14)$$

$$u_x = (1-x)u' + xu'' = u' + x(u'' - u') \quad (15)$$

Entalpia właściwa cieczy

$$i \cong c_p t \quad (16)$$

Parametry stanu dla punktu pęcherzyków (oznaczone prim) i pary nasyconej suchej (oznaczone bis) można odczytać z tablic parowych.

4 Charakterystyka metod określania własności pary wodnej

4.1 Metoda odczytu z tablic pary wodnej

Ze względu na duże znaczenie pary wodnej dla techniki, zwołuje się systematycznie w odstępach kilkuletnich międzynarodowe konferencje poświęcone tablicom pary wodnej. Na konferencjach tych omawiane są i analizowane wyniki badań eksperymentalnych, prowadzonych w różnych krajach, a także uzgadnia się tzw. tablice ramowe, zawierające podstawowe dane. Dzięki osiągniętej wysokiej dokładności pomiarów, niektóre parametry są wyznaczone z błędem nie przekraczającym 0.1 %. Obecnie w wielu krajach publikuje się systematycznie tablice pary wodnej. Jedną z pozycji literaturowych jest: „Propertness of Water and Steam in SI-Units”, Ernst Schmidt. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg New York, R. Oldenbourg München 1989. Tablice zawierają dane dotyczące wody oraz pary nasyconej i przegrzanej, przedstawione w taki sposób, aby jak najbardziej ułatwić korzystanie z nich w praktyce. Wartości zmiennych niezależnych są podawane w tak małych odstępach, by dla wartości pośrednich można obliczać funkcje przez interpolację liniową, z wystarczającą dokładnością.

W części poświęconej parze nasyconej są podawane zwykle następujące wielkości: ciśnienie oraz temperatura nasycenia, objętości właściwe v' oraz v'' , entalpie właściwe i' oraz i'' , entropie właściwe s' oraz s'' (wody wrzącej i pary suchej nasyconej), całkowite ciepło parowania r . Wielkości te wystarczają do określenia wszystkich parametrów pary nasyconej: np. energię wewnętrzną można obliczyć z wzoru $u = i - pv$.

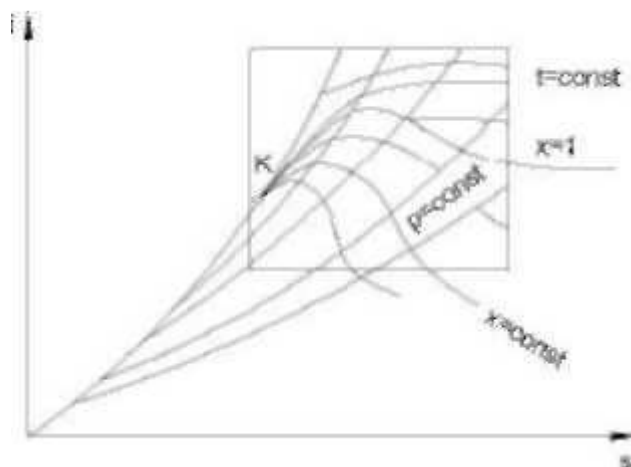
Część poświęcona parze przegrzanej zawiera zestawione w postaci tabelarycznej wartości: objętości właściwej, entalpii właściwej i entropii właściwej pary przy różnych wartościach⁴

⁴ Porównanie metod określania własności termodynamicznych pary wodnej – prof. dr hab. Inż. Krzysztof Urbaniec – ZAP Politechnika Warszawska Wydz. BMiP, Płock 2002r

4.2 Metoda odczytu z wykresów

Zamiast z tablic wygodniej jest korzystać z wykresów. Pozwalają one rozwiązywać te same problemy w znacznie krótszym czasie, jakkolwiek dzieje się to kosztem zmniejszenia dokładności uzyskanych wyników. Najdogodniejszym w zastosowaniach wykresem jest wykres ts (entalpia właściwa - entropia właściwa, rys. 1). Popularne są też wykresy $p-v$ (ciśnienie - objętość właściwa) i $T-s$ (temperatura - entropia właściwa). Wykres $i-s$ został po raz pierwszy wprowadzony przez R. Molliera.

Poniższy rysunek przedstawia taki uproszczony wykres Moliera



Rys. 6 Wykres Moliera

Wykres naniesiony jest na prostokątną siatkę linii stałej entalpii właściwej i stałej entropii właściwej. Znajdują się na nim izobary, które w obszarze pary nasyconej są jednocześnie izotermami; mają one kształt linii prostych stycznych do lewej krzywej granicznej (zbiór punktów, odpowiadających stanom wrzącej cieczy oraz pary suchej nasyconej, tworzy krzywą nazywaną krzywą graniczną, część krzywej granicznej po lewej stronie punktu krytycznego K jest nazywana lewą lub dolną krzywą graniczną i stanowi miejsce geometryczne punktów wrzenia cieczy), druga gałąź będąca miejscem geometrycznym punktów pary suchej nasyconej jest nazywana prawą lub górną krzywą graniczną). W obszarze pary przegrzanej izotermy i izobary mają różny przebieg. W obszarze pary wilgotnej nanosi się także Linie stałego stopnia suchości,

które schodzą się w punkcie krytycznym K. Wreszcie zwykle na wykresie i-s rysowane są również izochory.

W praktyce rzadko korzysta się z lewej części wykresu w pobliżu dolnej krzywej granicznej (obszar cieczy), gdyż ze względu na duże zagęszczenie linii odczyty tam dokonywane byłyby mało dokładne. Dlatego do celów praktycznych wykonuje się tylko wycinek pełnego wykresu, objęty na rys. 1 ramką, który powiększa się do takiej skali, aby można było dokonywać odczytów z wystarczającą dokładnością.

Z wykresu 1-5 można odczytywać parametry stanu pary dla dowolnej przemiany. Konstrukcja wykresu ułatwia rozwiązywanie wielu zadań. Na przykład korzystając z tego, że ciepło przemiany izobarycznej jest równe przyrostowi entalpii, można je w prosty sposób odczytać bezpośrednio z wykresu. Szczególną zaletą wykresu i-s dla pary jest łatwość przejścia z obszaru pary nasyconej do przegrzanej i przeciwnie, co w przypadku posługiwania się wyłącznie tablicami może wymagać żmudnych obliczeń⁵.

4.3 Metoda obliczania z zależności aproksymacyjnych.

Rozważmy przykładowy zbiór danych doświadczalnych, zawierający wartości entropii właściwej pary suchej nasyconej dla różnych wartości ciśnienia nasycenia. Pomiedzy wymienionymi parametrami istnieje relacja, która jest funkcją 1 może być wyrażona za pomocą określonego wzoru.

Aproksymacja danych doświadczalnych polega na:

a) znalezieniu ogólnej postaci funkcji $s'' = f(p)$. Na przykład:

$$s'' = a + b \cdot p + c \cdot p^2 + d \cdot p^3$$

gdzie a, b, c, d- współczynniki o nieznanymi wartościami.

b) wyznaczeniu wartości współczynników (w naszym przykładzie chodzi o wartości a, b, c, d).

Istnieją narzędzia obliczeniowe, które ułatwiają rozwiązywanie takich zadań. np. programy komputerowe do aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów.

⁵ Porównanie metod określania własności termodynamicznych pary wodnej – prof. dr hab. Inż. Krzysztof Urbaniec – ZAP Politechnika Warszawska Wydz. BMiP, Płock 2002r

Wyznaczanie własności pary wodnej z zależności aproksymacyjnych ma charakter przybliżony, chociaż zależności składające się z dostatecznie wielu członów (każdy człón może mieć postać funkcji liniowej, kwadratowej, wykładniczej, logarytmicznej, trygonometrycznej, itp.). pozwalają na uzyskanie dobrych dokładności. Zależności te szeroko wykorzystuje się w komputerowym wspomaganie obliczeń inżynierskich. Podprogramy, obliczające własności pary wodnej (lub innego czynnika) z zależności aproksymacyjnych, grupuje się w biblioteki 1 dołącza do programów rozwiązujących określone zagadnienia techniczne.

Przykłady zależności aproksymacyjnych:

Entropię właściwą pary suchej nasyconej w funkcji ciśnienia $s'' = f(p)$, można wyrazić stosunkowo prostym wzorem⁶:

$$s'' = a + b \cdot p + c \cdot p^2 + d \cdot p^3 \quad (17)$$

gdzie:

p - ciśnienie [bar] (1 bar = 0.1 MPa)

s'' - entropia właściwa [kJ/(kg W K)].

Współczynniki a , b , c , d przyjmują różne wartości w różnych zakresach ciśnienia:

	0.1 < p < 1.0	1.0 < p < 5.0	5.0 < p < 20.0
a	8.38684	7.70667	7.20-130
b	-2.9184955	-0.4284894	-0.09689054
c	3.3786089	0.08226266	4.258048 10 ⁻¹
d	-1.4979468	-6.438552 10 ⁻³	-7.9266 10 ⁻¹

Entalpia właściwa pary przegrzanej w funkcji temperatury i ciśnienia $i = f(p, t)$

⁶ Porównanie metod określania własności termodynamicznych pary wodnej – prof. dr hab. Inż. Krzysztof Urbaniec – ZAP Politechnika Warszawska Wydz. BMiP, Płock 2002r

$$\begin{aligned}
i = & 1808,9 + 1,48285 \cdot (t + 273,15) + 0,0003790025 \cdot (t + 273,15)^2 + \\
& + \frac{46,174 \cdot \ln(t + 273,15)}{70,1204} + \\
& + \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^6 \left[n \left(\frac{p \cdot 0,980665}{221,2} \right)^m \cdot a[m, n] \cdot \frac{1}{\left(\frac{t + 273,15}{647,3} \right)^{n-1}} \right]
\end{aligned} \tag{18}$$

gdzie

t – temperatura [C]

p – ciśnienie [bar]

$a[m, n]$ – tablica 24 elementowa zawierająca współczynniki

5 Aproksymacja

5.1 Aproksymacja wielomianowa

Aproksymacja jest to przybliżanie funkcji $y = f(x)$ zwanej funkcją aproksymowaną inną funkcją $\hat{y} = Q(x)$ zwaną funkcją aproksymującą.

dla aproksymacji średniokwadratowej punktowej błąd średniokwadratowy wyraża się wzorem

$$S = \sum_{i=0}^n \{f(x_i) - Q(x_i)\}^2 \tag{19}$$

Aproksymacja wielomianowa to taka aproksymacja w której funkcja aproksymująca jest wielomianem

$$\hat{y} = Q(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \tag{20}$$

Aby błąd średniokwadratowy wielomianu aproksymującego był najmniejszy musi być spełniony warunek

$$\min_{a_0, a_1, \dots, a_m} S = \sum_{i=0}^n (y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j)^2. \quad (21)$$

Zauważmy, że błąd średniokwadratowy jest funkcją współczynników a_0, a_1, \dots, a_m a więc z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych mamy

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (22)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) x_i^1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) x_i^2 = 0 \quad (23)$$

·
·

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = -2 \sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) x_i^m = 0$$

otrzymamy układ $m+1$ równań liniowych o $m+1$ niewiadomych współczynnikach a_0, a_1, \dots, a_m , który można zapisać w postaci sumy

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \quad (24)$$

·
·

$$a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+m} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^m$$

5.2 Wielomiany ortogonalne

Wielomiany są ortogonalne na zbiorze punktów x_0, x_1, \dots, x_n jeśli spełniają warunek

$$\sum_{i=0}^n P_j(x_i)P_k(x_i) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ const & j = k \end{cases} \quad (25)$$

gdzie j i k określają stopień wielomianu.

Zastosowanie wielomianów ortogonalnych do aproksymacji znacznie upraszcza obliczenia wyznaczające funkcję aproksymującą. Nie trzeba wtedy rozwiązywać układu równań (24) ponieważ macierz współczynników jest macierzą diagonalną.

Niech wielomian uogólniony będzie kombinacją liniową wielomianów ortogonalnych

$$P_j^{(n)}(x)$$

j - określa stopień wielomianu, n związane jest z liczbą punktów a jest ich dokładnie $n+1$

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j P_j^{(n)}(x). \quad (26)$$

Układ równań upraszcza się wówczas do postaci

$$a_j \sum_{i=0}^n P_j(x_i)P_j(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i P_j(x_i) \quad (27)$$

Współczynniki wielomianu uogólnionego otrzymujemy zatem ze wzoru

$$a_j = \frac{\sum_{i=0}^n y_i P_j(x_i)}{\sum_{i=0}^n P_j(x_i)P_j(x_i)} \quad (28)$$

Funkcję aproksymującą za pomocą wielomianu uogólnionego zapisać możemy więc w postaci

$$\hat{y} = \sum_{j=0}^m \frac{\sum_{i=0}^n y_i P_j(x_i)}{\sum_{i=0}^n P_j(x_i)P_j(x_i)} P_j(x) \quad (29)$$

Czyli

$$\hat{y} = \sum_{j=0}^m a_j P_j(x) \quad (30)$$

5.3 Wielomian ortogonalny na zbiorze dyskretnym

Na zbiorze dyskretnym mającym n punktów możemy utworzyć co najwyżej n różnych wielomianów ortogonalnych. Wzory rekurencyjne do tworzenia takich wielomianów wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} p_{-1}(x) &= 0, & p_0(x) &= 1 \\ p_{k+1}(x) &= (x - \alpha_{k+1})p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x) \\ \alpha_{k+1} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_k^2(x_i)}, & \beta_k &= \frac{\sum_{i=1}^n p_k^2(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_{k-1}^2(x_i)} \end{aligned} \quad (31)$$

Wielomiany te mają k różnych miejsc zerowych i możemy utworzyć z nich wielomian uogólniony obliczając współczynniki a_j i funkcję aproksymującą na podstawie wzorów (26), (28) i (30).

IMPLEMENTACJA ALGORYTMU

1 Dane pomiarowe

Ponieważ znajomość entalpii wody i pary wodnej ma tak duże znaczenie praktyczne powstały na świecie różne instytucje (najczęściej przy prestiżowych i renomowanych uczelniach o ogólnoświatowym zasięgu) zajmujące się empirycznym wyznaczeniem parametrów wody i pary. Jedną z takich instytucji jest:

“The International Association for the Properties of Water and Steam”

Wyniki badań publikowane są w specjalistycznych broszurach oraz na internetowej stronie tej instytucji <http://www.iapws.org/> z której skorzystałem pobierając tabele na podstawie której sporządzony został wykres.

Tabela pokazana poniżej zawiera wyniki pomiarów entalpii dla różnych wartości ciśnień przy ustalonej wartości temperatury

Wykres sporządzony został w oparciu o cztery dalsze tabele które przedstawiają zmiany ciśnienia wody i pary w zależności od jej entalpii dla ustalonych innych parametrów takich jak temperatura, gęstość, entropia, stopień nasycenia pary.⁷

Interpretacja kolorów na wykresie jest następująca:

Kolor niebieski – temperatura = const.

Kolor zielony – gęstość = const.

Kolor czerwony – entropia = const.

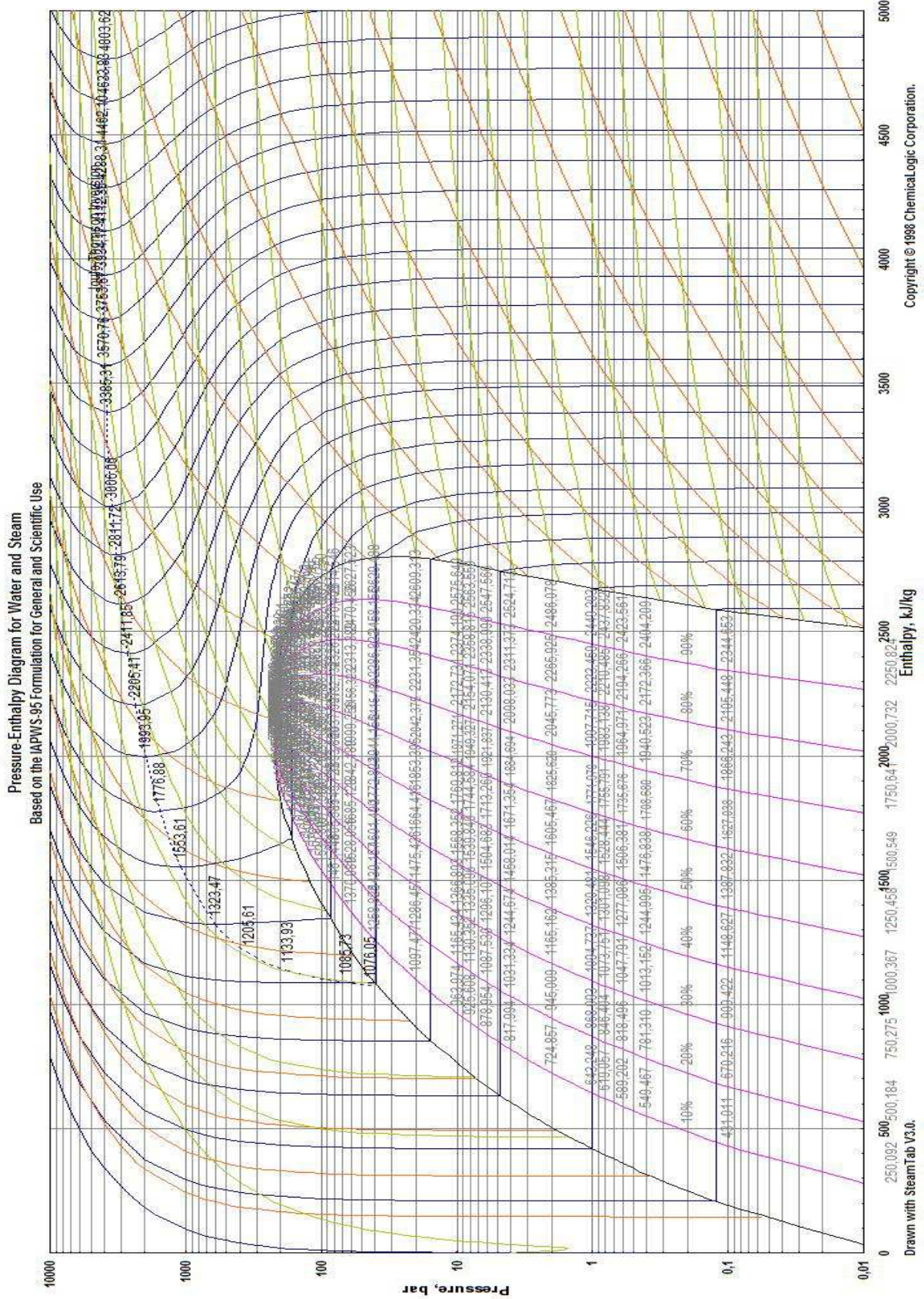
Kolor różowy – stopień nasycenia pary = const.

⁷ The International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS)

T = tC	T = 50C	T = 100C	T = 150C	T = 200C	T = 250C	T = 300C	T = 350C	T = 400C	T = 500C	T = 500C	T = 500C	T = 600C	T = 650C	T = 700C	T = 750C	T = 800C	T = 850C	T = 900C	T = 950C	T = 1000C	T = 1000C	T = 1050C	T = 1100C	
P, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	k.kgP, bar	
1000	786.6	1000.97	1000.134	1000.152	1000.170	1000.182	1000.202	1000.241	1000.299	1000.373	1000.473	1000.600	1000.754	1000.938	1000.1154	1000.1368	1000.1634	1000.1964	1000.2360	1000.2834	1000.3398	1000.4062	1000.4826	
800	543.6	800.628	800.1016	800.1383	800.1859	800.2477	800.3283	800.4341	800.5713	800.7465	800.9653	1000.1224	1000.1594	1000.2084	1000.2724	1000.3544	1000.4584	1000.5884	1000.7484	1000.9444	1000.1184	1000.1484	1000.1844	1000.2264
600	486.2	600.682	600.870	600.1057	600.1242	600.1428	600.1613	600.1800	600.2026	600.2304	600.2634	600.3018	600.3456	600.3948	600.4494	600.5104	600.5784	600.6534	600.7364	600.8274	600.9264	600.1034	600.1164	
400	343.4	400.532	400.727	400.912	400.1102	400.1233	400.1400	400.1586	400.1791	400.2024	400.2284	400.2568	400.2874	400.3204	400.3558	400.3936	400.4338	400.4764	400.5214	400.5694	400.6204	400.6744	400.7314	
200	182.2	200.375	200.571	200.768	200.966	200.1166	200.1389	200.1644	200.1944	200.2284	200.2674	200.3114	200.3604	200.4144	200.4734	200.5374	200.6064	200.6804	200.7594	200.8434	200.9324	200.1026	200.1136	
100	95.4	100.293	100.485	100.679	100.874	100.1074	100.1277	100.1484	100.1704	100.1934	100.2184	100.2454	100.2744	100.3054	100.3384	100.3734	100.4104	100.4494	100.4904	100.5334	100.5784	100.6254	100.6744	
80	71.6	80.265	80.478	80.684	80.897	80.1104	80.1277	80.1454	80.1644	80.1844	80.2054	80.2284	80.2534	80.2794	80.3074	80.3374	80.3694	80.4034	80.4394	80.4774	80.5174	80.5594	80.6034	
60	58.5	60.273	60.466	60.670	60.886	60.1097	60.1259	60.1434	60.1624	60.1824	60.2034	60.2254	60.2484	60.2734	60.2994	60.3264	60.3554	60.3864	60.4194	60.4544	60.4914	60.5294	60.5684	
40	39.5	40.269	40.449	40.633	40.821	40.1019	40.1174	40.1344	40.1524	40.1714	40.1914	40.2124	40.2344	40.2574	40.2814	40.3064	40.3324	40.3594	40.3874	40.4164	40.4464	40.4774	40.5094	
20	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	
10	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	

Rys. 7 Tabela danych ⁸

⁸ The International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS)

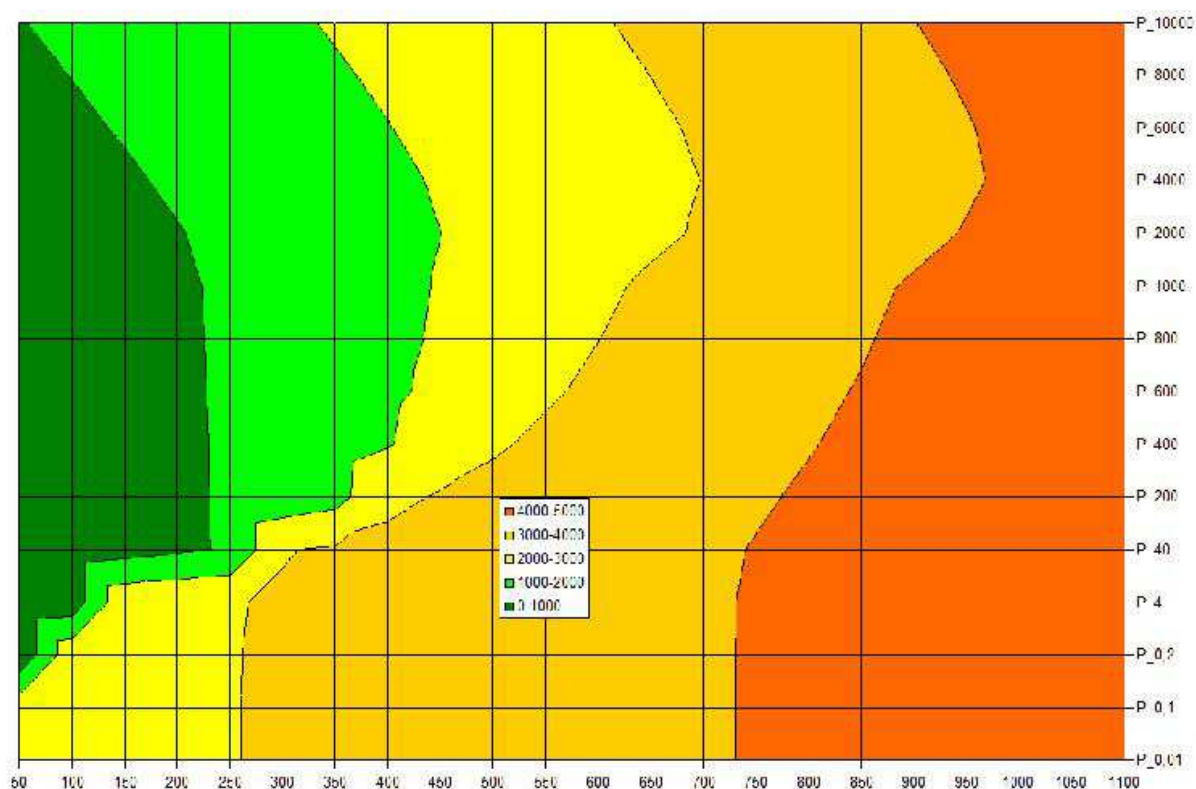


Rys. 8 Wykres I(P) skala logarytmiczna⁹

⁹ The International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS)

1.1 Wykres entalpii w funkcji temperatury i ciśnienia

Poniższy wykres przedstawia funkcję entalpii w zależności od temperatury i ciśnienia. Poziomice przedstawione są na nim podobnie jak na terenowej mapie fizycznej. Widać tu wyraźnie że zależność funkcyjna entalpii od tych zmiennych musi być dosyć skomplikowana



Rys. 9 Wykres poziomicowy I(P,T) (opracowanie własne)

2 Budowa funkcji aproksymującej entalpię na podstawie danych pomiarowych

Opisane powyżej sposoby aproksymacji i przedstawione dane pomiarowe pozwalają na budowanie funkcji aproksymujących które umożliwią obliczenia wartości entalpii dla danych ciągłych bez konieczności dokonywania obliczeń interpolacyjnych tak jak to miało miejsce w przypadku korzystania z tabel. Ponieważ obliczenia swoje będą opierał na przedstawionej na Rys 7 tabeli danych przyjąłem zastosowane w niej jednostki a więc:

temperatura T [$^{\circ}\text{C}$]

ciśnienie P [bar]

entalpia I [kJ/kg]

2.1 Budowa funkcji aproksymującej zależność ciśnienia od temperatury dla linii przemiany woda-para

Funkcja aproksymująca zależność ciśnienia od temperatury dla linii przemiany woda-para jest funkcją pomocniczą w obliczeniach entalpii, jednakże poprawność i dokładność dokonywanych za jej pomocą obliczeń będzie miała zasadniczy wpływ na dalsze postępowanie. Wynik działania tej funkcji pozwoli nam stwierdzić czy mamy do czynienia z parą nasyconą i będzie decydował o podjęciu dalszych obliczeń.

Dane pomiarowe do budowy tej funkcji znalazłem na stronie

<http://www.fing.edu.uy/if/mirror/TEST/index.html> skąd po przeniesieniu do Excela i scaleniu w nim kilku zawartych tam tabel podobnych do tej przedstawionej poniżej prowadziłem dalsze obliczenia

Table-B.2, PC Model, H₂O: Saturation Temperature Table

Saturated Water (H2O)--Temperature Table									
deg-C	kPa	Spec. Volume m ³ /kg		Internal Energy kJ/kg		Enthalpy kJ/kg		Entropy kJ/kg ^o K	
Temp.	Sat. press.	Sat. liquid	Sat. vapor	Sat. liquid	Sat. vapor	Sat. liquid	Sat. vapor	Sat. liquid	Sat. vapor
T ^o C	p_sat@T	v _f	v _g	u _f	u _g	h _f	h _g	s _f	s _g
0.01	0.6113	0.001000	206.14	0.00	2375.3	0.00	2501.4	0.0000	9.1562
5	0.8721	0.001000	147.12	20.97	2382.3	20.98	2510.6	0.0761	9.0257
10	1.2276	0.001000	106.38	42.00	2389.2	42.01	2519.8	0.1510	8.9008
15	1.7051	0.001001	77.93	62.99	2396.1	62.99	2528.9	0.2245	8.7814
20	2.339	0.001002	57.79	83.95	2402.9	83.96	2538.1	0.2966	8.6672
25	3.169	0.001003	43.36	104.88	2409.8	104.89	2547.2	0.3674	8.5580
30	4.246	0.001004	32.89	125.78	2416.6	125.79	2556.3	0.4369	8.4533
35	5.628	0.001006	25.22	146.67	2423.4	146.68	2565.3	0.5053	8.3531
40	7.384	0.001008	19.52	167.56	2430.1	167.57	2574.3	0.5725	8.2570
45	9.593	0.001010	15.26	188.44	2436.8	188.45	2583.2	0.6387	8.1648
50	12.349	0.001012	12.03	209.32	2443.5	209.33	2592.1	0.7038	8.0763
55	15.758	0.001015	9.568	230.21	2450.1	230.23	2600.9	0.7679	7.9913
60	19.940	0.001017	7.671	251.11	2456.6	251.13	2609.6	0.8312	7.9096
65	25.03	0.001020	6.197	272.02	2463.1	272.06	2618.3	0.8935	7.8310
70	31.19	0.001023	5.042	292.95	2469.6	292.98	2626.8	0.9549	7.7553
75	38.58	0.001026	4.131	313.90	2475.9	313.93	2643.7	1.0155	7.6824
80	47.39	0.001029	3.407	334.86	2482.2	334.91	2635.3	1.0753	7.6122
85	57.83	0.001033	2.828	355.84	2488.4	355.90	2651.9	1.1343	7.5445
90	70.14	0.001036	2.361	376.85	2494.5	376.92	2660.1	1.1925	7.4791
95	84.55	0.001040	1.982	397.88	2500.6	397.96	2668.1	1.2500	7.4159
T ^o C	p_sat@T MPa	v _f	v _g	u _f	u _g	h _f	h _g	s _f	s _g
100	0.10135	0.001044	1.6729	418.94	2506.5	419.04	2676.1	1.3069	7.3549
105	0.12082	0.001048	1.4194	440.02	2512.4	440.15	2683.8	1.3630	7.2958
110	0.14327	0.001052	1.2102	461.14	2518.1	461.30	2691.5	1.4185	7.2387
115	0.16906	0.001056	1.0366	482.30	2523.7	482.48	2699.0	1.4734	7.1833
120	0.19853	0.001060	0.8919	503.50	2529.3	503.71	2706.3	1.5276	7.1296
125	0.2321	0.001065	0.7706	524.74	2534.6	524.99	2713.5	1.5813	7.0775

Rys. 10 Fragment tabeli wartości pomiarowych dla linii przemiany woda-para ¹⁰

Funkcję zbudowałem na podstawie stabelaryzowanych wartości temperatury i ciśnienia linii przemiany woda para w oparciu o opisany w punkcie 1.5.3 wielomian ortogonalny. W arkuszu kalkulacyjnym Excel umieściłem formuły rekurencyjne które umożliwiają tworzenie takich wielomianów od 1-go do 7-go stopnia. Fragmentaryczne wyniki obliczeń przedstawiam poniżej

¹⁰ <http://www.fing.edu.uy/if/mirror/TEST/index.html>

T _i	P _i	g0(Pi)	g5(Pi)	f(Pi)g5(Pi)	g52(Pi)	Pig52(Pi)	Pi(5)	Pi(6)	Pi(7)	eps(5)	
300	85,81	1	-6E+06	-5E+08	3,5E+13	1E+16	85,81271578	85,81104689	85,81154351	7,37545E-06	148,87 A
303,4	90	1	1810935	1,6E+08	3,3E+12	9,9E+14	89,99591801	89,99714509	89,99655016	1,66626E-05	1,826597873 B
305	92,02	1	3510252	3,2E+08	1,2E+13	3,8E+15	92,0182599	92,0197961	92,01925657	3,02795E-06	0,009378084 C
310	98,56	1	3899049	3,8E+08	1,5E+13	4,7E+15	98,56541389	98,56598625	98,56616734	2,93102E-05	3,35643E-05 D
311,06	100	1	3384699	3,4E+08	1,1E+13	3,6E+15	99,99851862	99,9987552	99,99905695	2,19448E-06	1,79008E-07 E
315	105,47	1	763632	8,1E+07	5,8E+11	1,8E+14	105,467279	105,4664568	105,4669097	7,40392E-06	7,31826E-10 F
318,15	110	1	-1E+06	-2E+08	2E+12	6,3E+14	110,0039527	110,0027372	110,0030121	1,56238E-05	338,7732 a
320	112,74	1	-2E+06	-3E+08	6,1E+12	2E+15	112,7381398	112,7369126	112,7370125	3,46033E-06	337,3995174 b
324,75	120	1	-4E+06	-5E+08	1,6E+13	5,3E+15	120,0015592	120,000901	120,000553	2,43118E-06	337,5443093 c
330	128,45	1	-4E+06	-5E+08	1,3E+13	4,2E+15	128,4515507	128,451959	128,451461	2,40454E-06	336,0530966 d
330,93	130	1	-3E+06	-4E+08	1,1E+13	3,5E+15	129,996197	129,9967796	129,9963071	1,44629E-05	337,0326864 e
336,75	140	1	-495476	-7E+07	2,5E+11	8,3E+13	140,0024625	140,0036696	140,0036145	6,06393E-06	561,1288458 V
340	145,86	1	1260499	1,8E+08	1,6E+12	5,4E+14	145,8540197	145,8551156	145,8553517	3,57638E-05	378,4289352 X
342,24	150	1	2332229	3,5E+08	5,4E+12	1,9E+15	150,0016792	150,0025098	150,0028987	2,81986E-06	375,3425317 Y
347,44	160	1	3777913	6E+08	1,4E+13	5E+15	160,0053316	160,0051749	160,0056128	2,84256E-05	360,1070674 Z
350	165,13	1	3741153	6,2E+08	1,4E+13	4,9E+15	165,1304183	165,1297543	165,1300404	1,74952E-07	
8469,33	3721,75	25	2,3E-07	180816	2,5E+14	8,3E+16	3721,75	3721,75	3721,75	0,000413278	
α _n		338,7732	337,003				0,000904222	0,000878809	0,000875043	0,000904222	
β _n		0	344,337								
λ _n		148,87	7,3E-10								

Rys. 11 Fragment obliczeń P(T) dla linii przemiany woda-para (opracowanie własne)

Za zadowalające wyniki uznałem otrzymane te otrzymane za pomocą wielomianu stopnia 5-go z dodatkowym podziałem krzywej przemiany woda para na 4-części w zakresach 0,01 – 100, 100 – 200, 200 – 300 i 300 – 374,14 °C. Sumarycznie zakres 0,01 – 374,14 °C jest pełnym zakresem temperatur w jakich zachodzić może przemiana woda – para a więc od temperatury punktu potrójnego 0,01 °C do temperatury punktu krytycznego 374,14 °C. Po prawej stronie tabelki widoczne są współczynniki w oparciu o które zbudowany jest wzór obliczeniowy

$$P(T) = A + B \cdot f1 + C \cdot f2 + D \cdot f3 + E \cdot f4 + F \cdot f5$$

gdzie

$$f1 = (T - a)$$

$$f2 = (T - b) \cdot f1 - V$$

(32)

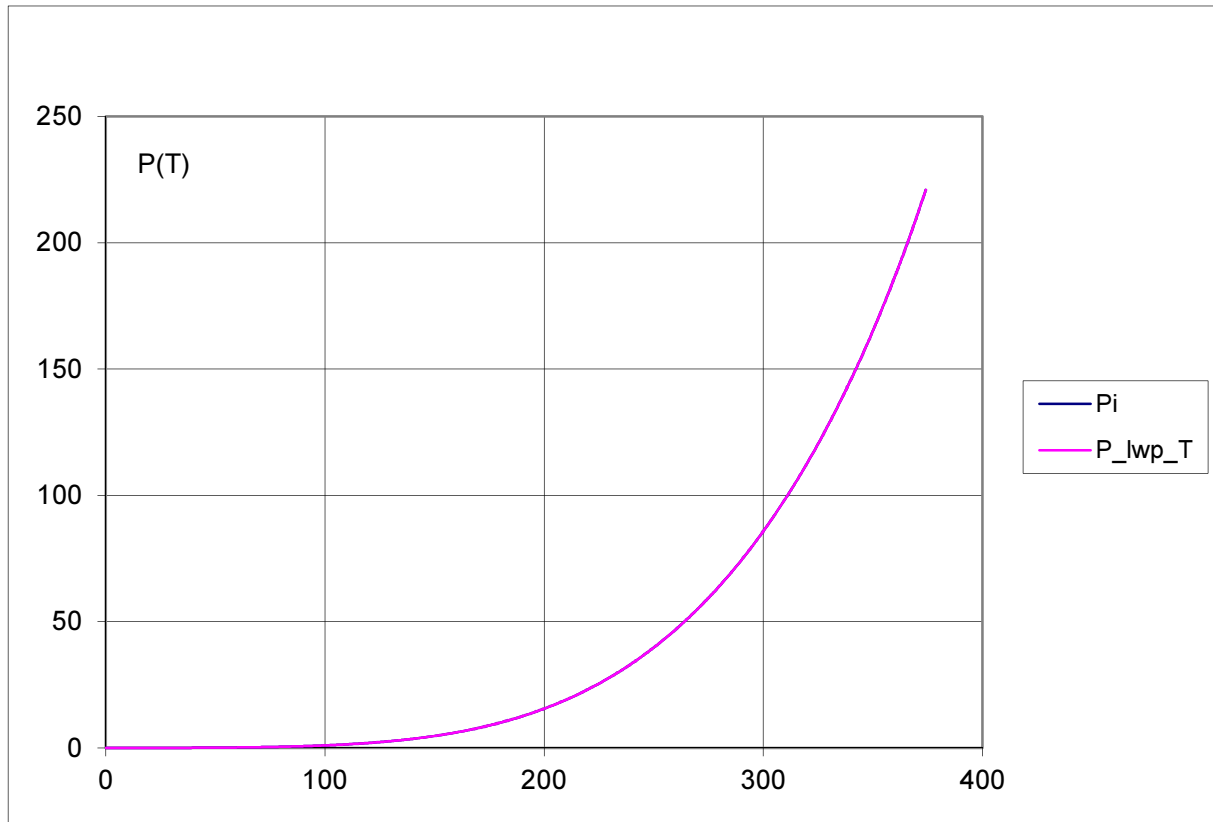
$$f3 = (T - c) \cdot f2 - X \cdot f1$$

$$f4 = (T - d) \cdot f3 - Y \cdot f2$$

$$f5 = (T - e) \cdot f4 - Z \cdot f3$$

W oparciu o powyższy wzór i współczynniki wyliczone dla każdego z wspomnianych wyżej 4 zakresów zbudowałem w Visual Basic funkcję P_lwp_T w taki sposób że wstępnie analizuje ona wartość temperatury a następnie na jej podstawie przyjmuje wartości współczynników z określonego przedziału i podstawia je wraz z tą temperaturą do wzoru (32)..

Listing tej funkcji jest dosyć długi nie będę więc go tu przytaczał pokażę natomiast wykres przebiegu linii przemiany dla punktów doświadczalnych i obliczonych za pomocą funkcji.

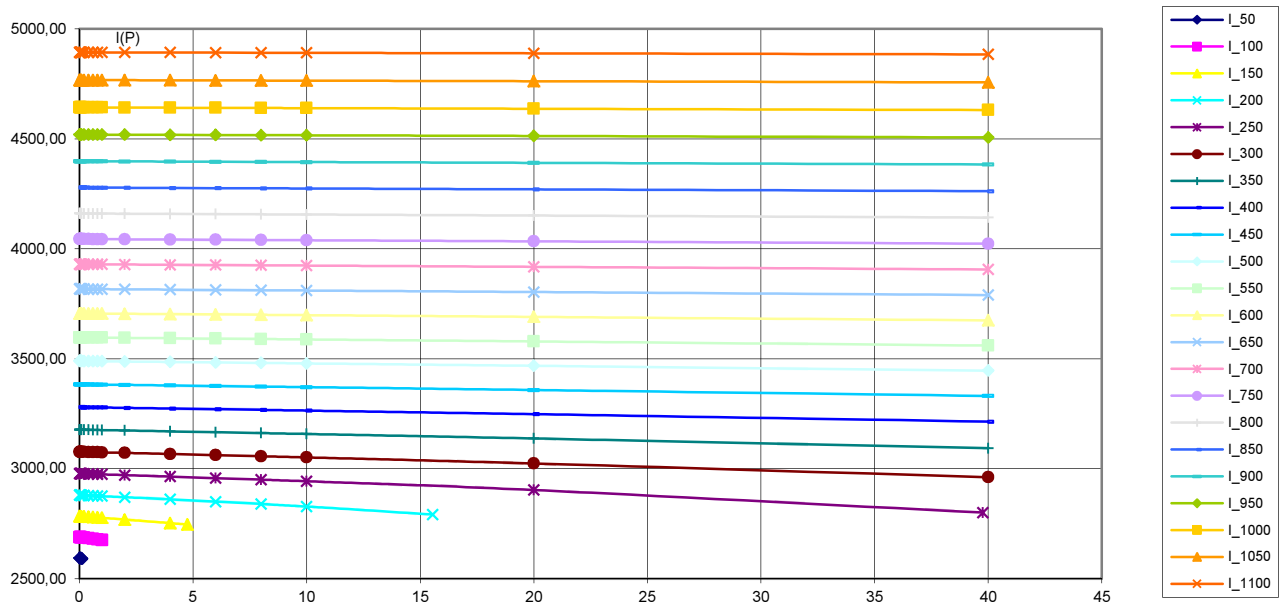


Rys. 12 Wykres linii przemiany woda-para (opracowanie własne)

2.2 Budowa funkcji aproksymującej entalpię pary wodnej nasyconej w zakresie ciśnień od 0,01 do 40 bar

Analizując tabelę danych Rys 7 można zauważyć że w połowie zakresu ciśnień jaki zawiera znajduje się wartość 40 bar. Postanowiłem zatem dokonać w tym miejscu podziału i na początek przeanalizować dane z zakresu 0,01 – 40 bar.

Poniższy wykres ilustruje przebiegi izoterm w tym zakresie. Krótsze izotermy nie dochodzące do 40 bar oznaczają że osiągnęły wcześniej ciśnienie z linii przemiany woda-para i nie mogą być dalej analizowane jako para nasycona.



Rys. 13 Wykres entalpii dla izoterm 50 – 1100 °C z zakresu ciśnień 0,01 – 40 bar (opracowanie własne)

Zebrałem dane liczbowe w tabelki obliczeniowe dla poszczególnych izoterm z zakresu 50 - 1100°C. Poniżej przedstawiam pierwszą z nich dla 50°C kolor niebieski wartości w kolumnach P, I_50 oznacza ciśnienie i entalpię pary nasyconej w punkcie przemiany woda-para dla tej izotermi.

P	I_50	g0(P)	g1(P)	f(P)g1(P)	g12(P)	f(P)g12(P)	g2(P)	f(P)g2(P)	g22(P)	f(P)g22(P)	Pi(1)	Pi(2)
0,01	2594,41	1	-0,05193	-134,731	0,002697	2,7E-05	0,001543	4,003873	2,38E-06	2,38E-08	2594,4	2594,4
0,02	2594,15	1	-0,04193	-108,776	0,001758	3,52E-05	0,000538	1,394874	2,89E-07	5,78E-09	2594,2	2594,1
0,04	2593,62	1	-0,02193	-56,8815	0,000481	1,92E-05	-0,00087	-2,26536	7,63E-07	3,05E-08	2593,6	2593,6
0,06	2593,08	1	-0,00193	-5,00815	3,73E-06	2,24E-07	-0,00148	-3,84961	2,2E-06	1,32E-07	2593,1	2593,1
0,08	2592,53	1	0,018069	46,84347	0,000326	2,61E-05	-0,0013	-3,35916	1,68E-06	1,34E-07	2592,5	2592,5
0,1	2591,97	1	0,038069	98,67268	0,001449	0,000145	-0,00031	-0,79533	9,42E-08	9,42E-09	2592	2592
0,124	2591,29	1	0,061588	159,5926	0,003793	0,000469	0,00188	4,870562	3,53E-06	4,36E-07	2591,3	2591,3
0,433519	18151,04	7	-8,3E-17	-0,28834	0,010509	0,000721	0	-0,00014	1,09E-05	7,72E-07	18151	18151
α_n		0,061931	0,068625				0,070585				0,0019	2E-05
β_n			0,001501				0,001041					
λ_n		2593,005	-27,4381				-13,1141					

Rys. 14 Tabelka zależności entalpii od ciśnienia dla 50°C (opracowanie własne)

ostatnia z tabelk dla izotermi 1100°C wygląda natomiast tak:

P	l_{1100}	$g_0(P)$	$g_1(P)$	$f(P)g_1(P)$	$g_{12}(P)$	$Pg_{12}(P)$	$g_2(P)$	$f(P)g_2(P)$	$g_{22}(P)$	$Pg_{22}(P)$	$P_i(1)$	$P_i(2)$
0,01	4893,77	1	-5,17389	-25319,8	26,76913	0,267691	61,89731	302911,2	3831,277	38,31277	4893,8	4893,8
0,02	4893,77	1	-5,16389	-25270,9	26,66575	0,533315	61,53936	301159,3	3787,093	75,74185	4893,8	4893,8
0,04	4893,76	1	-5,14389	-25173	26,45959	1,058384	60,82406	297658,5	3699,566	147,9827	4893,8	4893,8
0,06	4893,76	1	-5,12389	-25075,1	26,25424	1,575254	60,10956	294161,6	3613,16	216,7896	4893,8	4893,8
0,08	4893,75	1	-5,10389	-24977,2	26,04968	2,083975	59,39587	290668,7	3527,869	282,2295	4893,8	4893,8
0,1	4893,75	1	-5,08389	-24879,3	25,84593	2,584593	58,68297	287179,7	3443,691	344,3691	4893,7	4893,7
0,2	4893,72	1	-4,98389	-24389,8	24,83915	4,96783	55,13048	269793,4	3039,37	607,874	4893,7	4893,7
0,4	4893,68	1	-4,78389	-23410,8	22,88559	9,154237	48,0855	235315	2312,215	924,8862	4893,7	4893,7
0,6	4893,63	1	-4,58389	-22431,9	21,01204	12,60722	41,12052	201228,7	1690,897	1014,538	4893,6	4893,6
0,8	4893,58	1	-4,38389	-21452,9	19,21848	15,37479	34,23555	167534,5	1172,073	937,6581	4893,6	4893,6
1	4893,54	1	-4,18389	-20474	17,50493	17,50493	27,43057	134232,5	752,4361	752,4361	4893,5	4893,5
2	4893,30	1	-3,18389	-15579,7	10,13715	20,2743	-5,39432	-26396	29,09868	58,19737	4893,3	4893,3
4	4892,83	1	-1,18389	-5792,57	1,401593	5,606372	-65,0441	-318250	4230,734	16922,94	4892,8	4892,8
6	4892,36	1	0,816111	3992,713	0,666037	3,996224	-116,694	-570909	13617,46	81704,76	4892,4	4892,4
8	4891,89	1	2,816111	13776,12	7,930482	63,44385	-160,344	-784384	25710,09	205680,7	4891,9	4891,9
10	4891,43	1	4,816111	23557,65	23,19493	231,9493	-195,993	-958687	38413,42	384134,2	4891,4	4891,4
20	4889,08	1	14,81611	72437,14	219,5171	4390,343	-254,242	-1243011	64639,15	1292783	4889,1	4889,1
40	4884,39	1	34,81611	170055,3	1212,162	48486,46	229,2599	1119794	52560,11	2102405	4884,4	4884,4
93,31	88066	18	0	-407,946	1738,513	53269,79	0	-0,34576	230069,7	4089031	88066	88066
α_n		5,183889	30,641				17,77301				5E-07	9E-09
β_n			96,58408				132,337					
λ_n		4892,555	-0,23465				-1,5E-06					

Rys. 15 Tabela zależności entalpii od ciśnienia dla 1100°C (opracowanie własne)

Tutaj nie zobaczymy już koloru niebieskiego ponieważ dla tej izotermy nigdy nie nastąpi przemiana pary w wodę jej wartość jest większa od temperatury punktu krytycznego 1100°C > 374,14 °C

Analizowałem różne warianty obliczeniowe i doszedłem do wniosku że w takim zakresie ciśnień (0,01 – 40 bar) bardzo dobre rezultaty daje aproksymacja wielomianowa stopnia 2. Oznacza to że do otrzymania analitycznej postaci linii z wykresu (Rys14) wystarczy użyć równań kwadratowych postaci.

$$E(P) = A + B \cdot f_1 + C \cdot f_2$$

gdzie

$$f_1 = (P - a)$$

$$f_2 = (P - b) \cdot f_1 - V$$

(33)

Policzyłem dla każdej z izoterm współczynniki aproksymacji i zebrałem je w poniższą tabelę:

	A	B	C	a1	b1	V
50	2593,0052	-27,4381	-13,11411	0,0619314	0,0686254	0,0015012
100	2684,0972	-12,89921	-0,810462	0,3603483	0,6285002	0,1410375
150	2776,1067	-7,854571	-0,222222	1,0051175	3,4381717	2,1965507
200	2865,1597	-5,450582	-0,080923	2,8740754	10,191538	19,033941
250	2957,5388	-4,296803	-0,034297	5,1706527	30,412234	95,665395
300	3063,012	-2,831861	-0,011777	5,1838889	30,640999	96,584079
350	3167,2336	-2,088389	-0,005214	"	"	"
400	3271,815	-1,629738	-0,002613	"	"	"
450	3377,3674	-1,317362	-0,001425	"	"	"
500	3484,1929	-1,090915	-0,000826	"	"	"
550	3592,4662	-0,919576	-0,000501	"	"	"
600	3702,2982	-0,785802	-0,000314	"	"	"
650	3813,7608	-0,678796	-0,000202	"	"	"
700	3926,8998	-0,591519	-0,000132	"	"	"
750	4041,7402	-0,51918	-8,7E-05	"	"	"
800	4158,2909	-0,4584	-5,75E-05	"	"	"
850	4276,5469	-0,406733	-3,78E-05	"	"	"
900	4396,4923	-0,362361	-2,44E-05	"	"	"
950	4518,1017	-0,323914	-1,53E-05	"	"	"
1000	4641,342	-0,290334	-8,94E-06	"	"	"
1050	4766,1744	-0,260797	-4,55E-06	"	"	"
1100	4892,5554	-0,234652	-1,5E-06	"	"	"

Rys. 16 Tabelka współczynników do analitycznego zapisania poszczególnych izoterm z zakresu 50 - 1100°C (opracowanie własne)

Jest rzeczą oczywistą że zmienność tych współczynników spowodowana jest zmianami temperatur wystarczy jeden rzut oka na powyższą tabelkę aby dostrzec ich korelację. Należy zatem tylko dokonać kolejnej aproksymacji ich wartości tak aby można było korzystać z nich w ciągłym zakresie zmienności.

Zanim jednak tego dokonam postanowiłem sprawdzić na ile dokładne będą funkcje (2-stopnia) aproksymujące entalpię dla poszczególnych izoterm. Ponieważ nie mam innych danych niż te pobrane z tabeli danych (Rys 7) postanowiłem wykorzystać je do porównań z punktami obliczonymi za pomocą analitycznej postaci funkcji. Postępowanie takie jest dopuszczalne ponieważ linia aproksymacji nie musi przebiegać przez żaden z tych punktów, nie są więc one w żaden sposób wyróżnione. Zbudowałem w tym celu 22 oddzielne funkcje postaci (wzór 33) o nazwach I_x_P (gdzie x – wartość izotermy) i porównałem wyniki ich obliczeń z danymi pomiarowymi.

Największy błąd względny $\Delta = 0,84$ (tabelka niżej) otrzymałem dla wartości P = 20 w funkcji izotermy 250°C I_250_P

P	I_250	g2(P)	f(P)g2(P)	g22(P)	Pig22(P)	Pi(2)	2957,538845 A	H_250_P	r
0,01	2977,74	61,22998	182326,9	3749,11	37,4911	2977,6	-4,29680337 B	2977,613128	0,13
0,02	2977,71	60,87445	181266,3	3705,699	74,11397	2977,6	-0,03429736 C	2977,582354	0,13
0,04	2977,64	60,16399	179146,9	3619,706	144,7882	2977,5	5,170652739 a1	2977,520784	0,12
0,06	2977,58	59,45433	177029,9	3534,818	212,0891	2977,5	30,41223437 b1	2977,459188	0,12
0,08	2977,51	58,74548	174915,4	3451,031	276,0825	2977,4	95,66539515 V	2977,397564	0,12
0,1	2977,45	58,03742	172803,4	3368,342	336,8342	2977,3		2977,335912	0,11
0,2	2977,12	54,50913	162280,4	2971,245	594,2491	2977		2977,027243	0,10
0,4	2976,47	47,51255	141419,9	2257,443	902,9771	2976,4		2976,407846	0,07
0,6	2975,82	40,59598	120806,4	1648,033	988,8199	2975,8		2975,785706	0,04
0,8	2975,17	33,7594	100439,9	1139,697	911,7576	2975,2		2975,160822	0,01
1	2974,51	27,00282	80320,26	729,1523	729,1523	2974,5		2974,533194	-0,02
2	2971,21	-5,58007	-16579,6	31,13714	62,27428	2971,4		2971,353898	-0,14
4	2964,47	-64,7458	-191937	4192,024	16768,1	2964,8		2964,789521	-0,32
6	2957,55	-115,912	-342814	13435,5	80613,01	2958		2957,950765	-0,40
8	2950,44	-159,077	-469348	25305,62	202444,9	2950,8		2950,837631	-0,40
10	2943,12	-194,243	-571681	37730,41	377304,1	2943,5		2943,450117	-0,33
20	2903,24	-250,072	-726019	62536,02	1250720	2902,4		2902,396867	0,84
39,762	2800,93	227,7446	637897,3	51867,59	2062346	2801,1		2801,096666	-0,16
93,07175	53235,7	0	-7726,26	225272,6	3995467	53236			
α_n		17,73615				1,3891			
β_n		130,8221							
λ_n		-0,0343							

Rys. 17 Tabelka zależności entalpii od ciśnienia dla 250°C współczynniki oraz błąd bezwzględny aproksymacji (opracowanie własne)

Listing funkcji dla izotermy 250°C o nazwie I_250_P przedstawiam poniżej

Function I_250_P(ByVal P As Double) As Double
Dim A, B, C, a1, b1, V, f1, f2 As Double

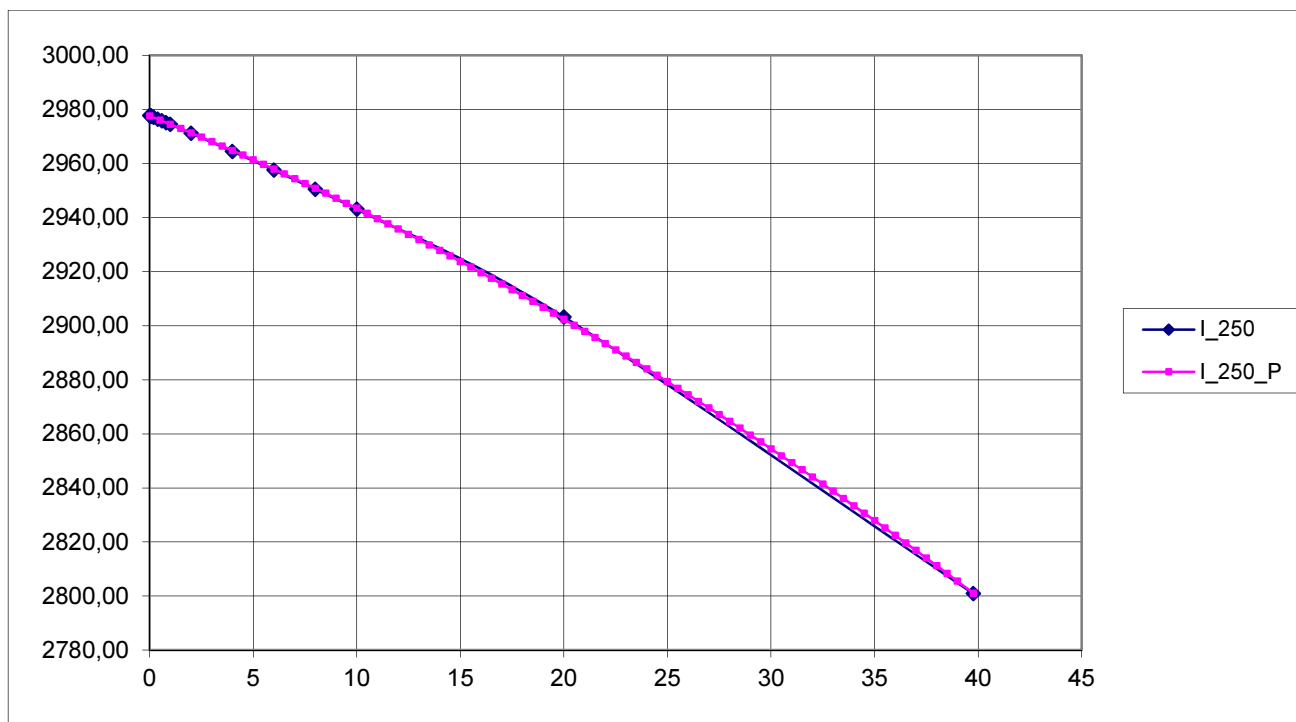
```
A = 2957.53884475888
B = -4.2968033653023
C = -3.42973628942458E-02
a1 = 5.17065273947193
b1 = 30.4122343711475
V = 95.665395149493
```

(34)

```
f1 = (P - a1)
f2 = (P - b1) * f1 - V
H_250_P = A + B * f1 + C * f2
End Function
```

Ta funkcja i podobne do niej 22 inne funkcje zostały napisane jedynie w celach porównawczych i dla sprawdzenia poprawności obliczeń nie będą one użyte w ostatecznym wzorze na entalpię.

Graficzne porównanie wyników funkcji i odpowiadających jej wartości z tabeli danych przedstawiam poniżej:



Rys. 18 Wykres porównawczy entalpii dla punktów izotermy I_250(P) i funkcji I_250_P (opracowanie własne)

Największy błąd względny $\Delta = 0,84$ dla wartości $P = 20$ w porównaniu z wartością funkcji w tym punkcie daje błąd względny wynoszący zaledwie $0,84/2903,24=0,03\%$ Jednakże jak już pisałem wcześniej nie jest to wzór ostateczny i dokonywał będę kolejnej aproksymacji współczynników w funkcji temperatur - zatem do ostatecznego błędu końcowej funkcji entalpii dojdzie jeszcze kolejny czynnik.

Z tabeli współczynników wynika w sposób naturalny kolejny podział, zauważyć można mianowicie że od $T=300^{\circ}\text{C}$ współczynniki a_1 , b_1 i V mają stałe wartości a więc od tego punktu w górę obliczenia można zredukować do poszukiwania wartości A , B i C Zebrałem zatem dane z pierwszego zakresu temperatur $50 - 250^{\circ}\text{C}$ w podobne do opisanych poprzednio tabelki aproksymacyjne i otrzymałem co następuje:

T_i	A	$g_0(P)$	$g_1(P)$	$g_4(P)$	$f(P)g_4(P)$	$g_{42}(P)$	$Pg_{42}(P)$	$Pi(4)$		
50	2593,005	1	-100	2E+06	6E+09	5E+12	2E+14	2593,0052	1,820259783	B
100	2684,097	1	-50	-9E+06	-2E+10	7E+13	7E+15	2684,0972	-1,092E-05	C
150	2776,107	1	0	1E+07	4E+10	2E+14	2E+16	2776,1067	1,60572E-06	D
200	2865,16	1	50	-9E+06	-2E+10	7E+13	1E+16	2865,1597	6,77102E-08	E
250	2957,539	1	100	2E+06	6E+09	5E+12	1E+15	2957,5388	150	a1
750	13875,91	5	0	0	2E+07	3E+14	5E+16	13875,908	150	b1
α_n		150	150	150				2,068E-25	150	c1
β_n			5000	1428,6					150	d1
λ_n		2775,182	1,82026	7E-08					5000	V
									3500	X
									2571,428571	Y
T_i	B	$g_0(P)$	$g_1(P)$	$g_4(P)$	$f(P)g_4(P)$	$g_{42}(P)$	$Pg_{42}(P)$	$Pi(4)$		
50	-27,4381	1	-100	2E+06	-6E+07	5E+12	2E+14	-27,4381	-11,5878534	A
100	-12,8992	1	-50	-9E+06	1E+08	7E+13	7E+15	-12,89921	-0,00084031	C
150	-7,85457	1	0	1E+07	-1E+08	2E+14	2E+16	-7,854571	5,49602E-06	D
200	-5,45058	1	50	-9E+06	5E+07	7E+13	1E+16	-5,450582	-3,6421E-08	E
250	-4,2968	1	100	2E+06	-9E+06	5E+12	1E+15	-4,296803	150	a1
750	-57,9393	5	0	0	-1E+07	3E+14	5E+16	-57,93927	150	b1
α_n		150	150	150				1,735E-29	150	c1
β_n			5000	1428,6					150	d1
λ_n		-11,5879	0,107462	-4E-08					5000	V
									3500	X
									2571,428571	Y
T_i	C	$g_0(P)$	$g_1(P)$	$g_4(P)$	$f(P)g_4(P)$	$g_{42}(P)$	$Pg_{42}(P)$	$Pi(4)$		
50	-13,1141	1	-100	2E+06	-3E+07	5E+12	2E+14	-13,11411	-2,85240277	A
100	-0,81046	1	-50	-9E+06	7E+06	7E+13	7E+15	-0,810462	0,053778324	B
150	-0,22222	1	0	1E+07	-3E+06	2E+14	2E+16	-0,222222	-0,00071317	C
200	-0,08092	1	50	-9E+06	693628	7E+13	1E+16	-0,080923	7,74716E-06	D
250	-0,0343	1	100	2E+06	-73494	5E+12	1E+15	-0,034297	-7,2775E-08	E
750	-14,262	5	0	0	-2E+07	3E+14	5E+16	-14,26201	150	a1
α_n		150	150	150				4,559E-30	150	b1
β_n			5000	1428,6					150	c1
λ_n		-2,8524	0,053778	-7E-08					5000	d1
									5000	V
									3500	X
									2571,428571	Y
T_i	a1	$g_0(P)$	$g_1(P)$	$g_4(P)$	$f(P)g_4(P)$	$g_{42}(P)$	$Pg_{42}(P)$	$Pi(4)$		
50	0,061931	1	-100	2E+06	132710	5E+12	2E+14	0,0619314	1,894425069	A
100	0,360348	1	-50	-9E+06	-3E+06	7E+13	7E+15	0,3603483	0,02546234	B
150	1,005118	1	0	1E+07	1E+07	2E+14	2E+16	1,0051175	0,000149157	C
200	2,874075	1	50	-9E+06	-2E+07	7E+13	1E+16	2,8740754	5,41782E-08	D
250	5,170653	1	100	2E+06	1E+07	5E+12	1E+15	5,1706527	-1,1163E-08	E
750	9,472125	5	0	0	-4E+06	3E+14	5E+16	9,4721253	150	a1
α_n		150	150	150				8,906E-31	150	b1
β_n			5000	1428,6					150	c1
λ_n		1,894425	0,025462	-1E-08					5000	d1
									5000	V
									3500	X
									2571,428571	Y

Rys. 19 Tabelki zależności współczynników aproksymacyjnych od temperatur dla zakresu 50-250°C (opracowanie własne)

T _i	b1	g0(P)	g1(P)	g4(P)	f(P)g4(P)	g42(P)	Pg42(P)	Pi(4)		
50	0,068625	1	-100	2E+06	147055	5E+12	2E+14	0,0686254	0,140500512	B
100	0,6285	1	-50	-9E+06	-5E+06	7E+13	7E+15	0,6285002	0,001236153	C
150	3,438172	1	0	1E+07	4E+07	2E+14	2E+16	3,4381717	7,47836E-06	D
200	10,19154	1	50	-9E+06	-9E+07	7E+13	1E+16	10,191538	5,21982E-08	E
250	30,41223	1	100	2E+06	7E+07	5E+12	1E+15	30,412234	150	a1
750	44,73907	5	0	0	2E+07	3E+14	5E+16	44,73907	150	b1
α _n		150	150	150				9,313E-30	150	c1
β _n			5000	1428,6					150	d1
λ _n		8,947814	0,140501	5E-08					5000	V
									3500	X
									2571,428571	Y

T _i	V	g0(P)	g1(P)	g4(P)	f(P)g4(P)	g42(P)	Pg42(P)	Pi(4)		
50	0,001501	1	-100	2E+06	3216,9	5E+12	2E+14	0,0015012	0,420441383	B
100	0,141037	1	-50	-9E+06	-1E+06	7E+13	7E+15	0,1410375	0,004793306	C
150	2,196551	1	0	1E+07	3E+07	2E+14	2E+16	2,1965507	3,85854E-05	D
200	19,03394	1	50	-9E+06	-2E+08	7E+13	1E+16	19,033941	2,14309E-07	E
250	95,6654	1	100	2E+06	2E+08	5E+12	1E+15	95,665395	150	a1
750	117,0384	5	0	0	7E+07	3E+14	5E+16	117,03843	150	b1
α _n		150	150	150				2,606E-28	150	c1
β _n			5000	1428,6					150	d1
λ _n		23,40769	0,420441	2E-07					5000	V
									3500	X
									2571,428571	Y

Rys. 20 cd. Tabelki zależności współczynników aproksymacyjnych od temperatur dla zakresu 50-250°C (opracowanie własne)

Jak widać w powyższych obliczeniach do aproksymacji tych współczynników użyłem wielomianów stopnia 4-go a następnie stworzyłem dla każdego z tych 6-ciu współczynników funkcję aproksymującą jego wartość. Poniżej przedstawiam przykładowy listing funkcji obliczającej współczynnik A który ze względu na rozróżnienie nazw z nazwami zagnieżdżonych zmiennych nazwałem w Visual Basic „wsp_A_40G” zakres ciśnienia do 40 bar a G – oznacza zakres temperatur do 250°C. Zakres do 1100°C oznaczę w dalszej części przez kolejną literę alfabetu „H”.

```
Function wsp_A_40G(ByVal T As Double) As Double 'T=50-250
Dim A, B, C, D, E, a1, b1, c1, d1, V, X, Y, f1, f2, f3, f4 As Double
```

```
A = 2775.18151329173
B = 1.82025978279159
C = -1.09196497511864E-05
D = 1.60572031008535E-06
E = 6.77102487751516E-08
a1 = 150
b1 = 150
c1 = 150
d1 = 150
V = 5000
X = 3500
Y = 2571.42857142857
```

```
f1 = (T - a1)
f2 = (T - b1) * f1 - V
```

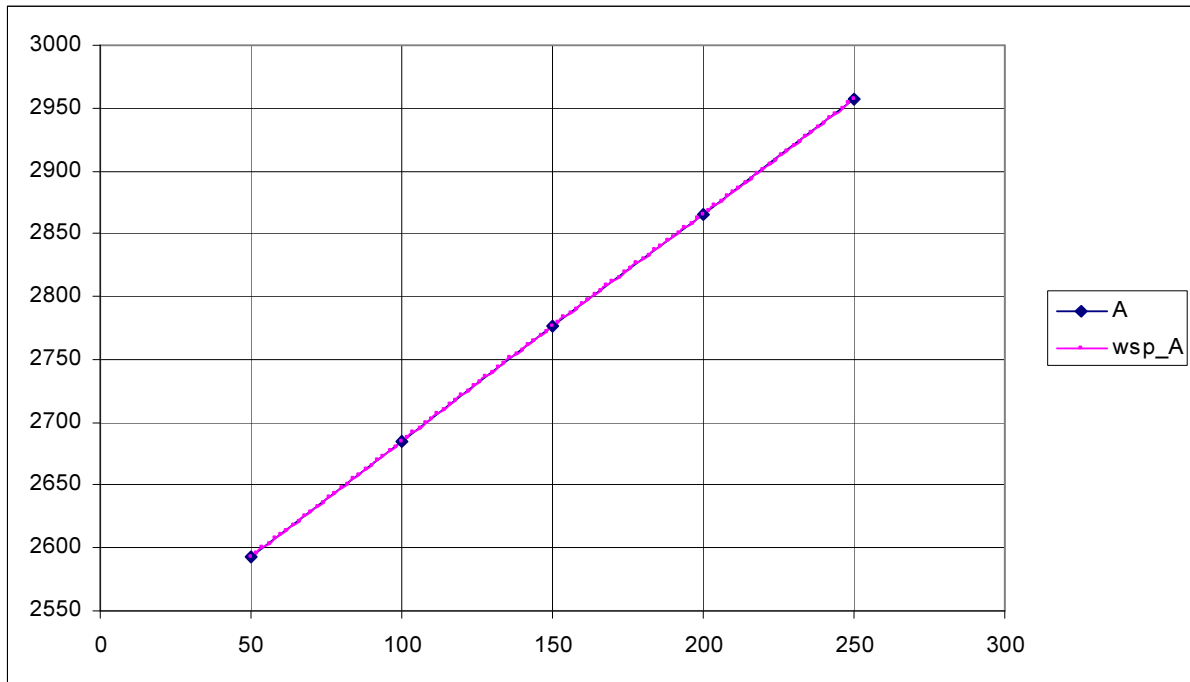
(35)

```

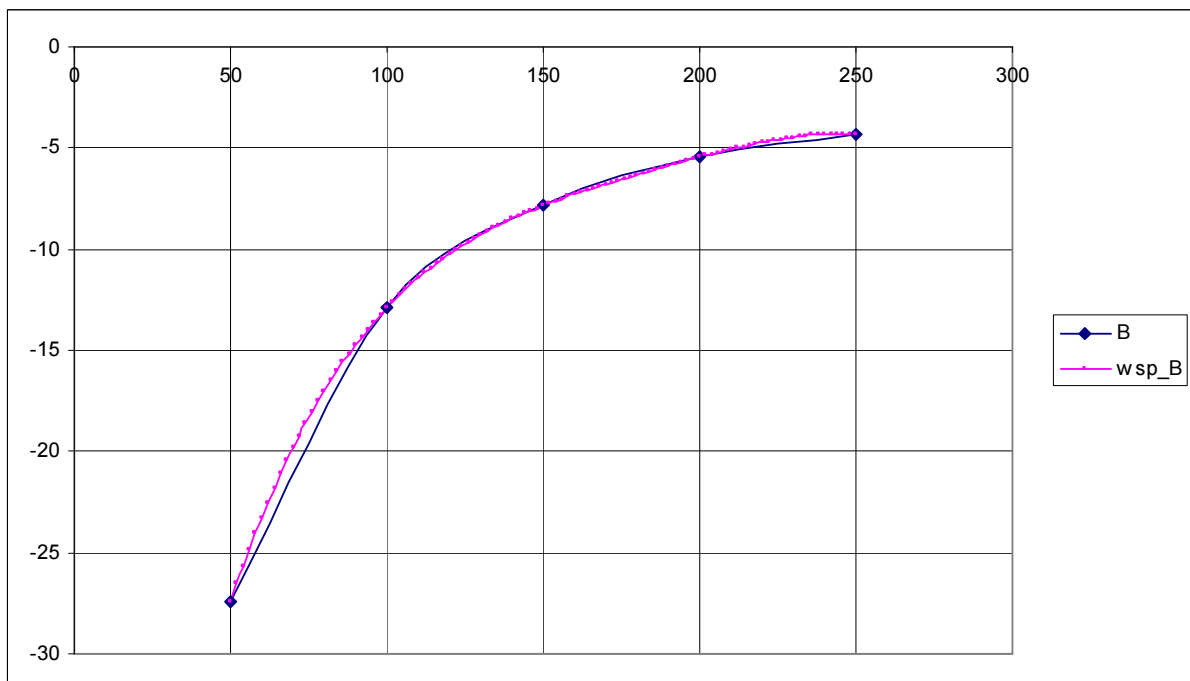
f3 = (T - c1) * f2 - X * f1
f4 = (T - d1) * f3 - Y * f2
wsp_A_40G = A + B * f1 + C * f2 + D * f3 + E * f4
End Function

```

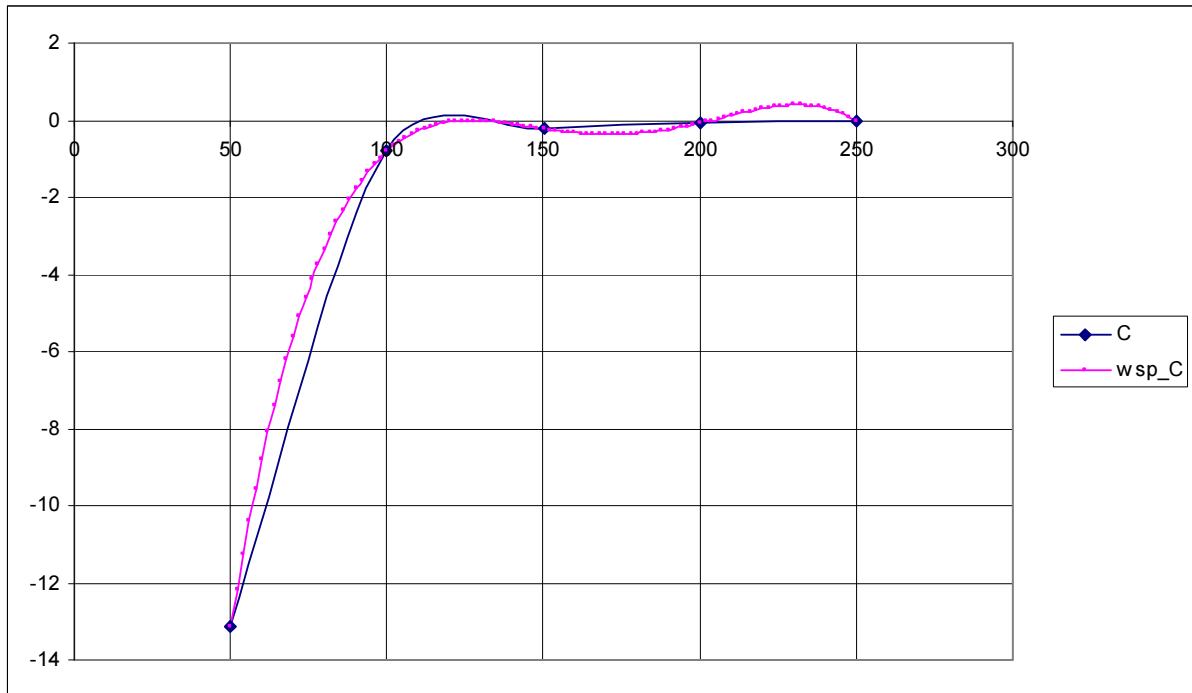
Natomiast graficzne porównanie wyników funkcji aproksymujących te 6 współczynników z ich wartościami wziętymi z tabeli (Rys 16) wygląda następująco:



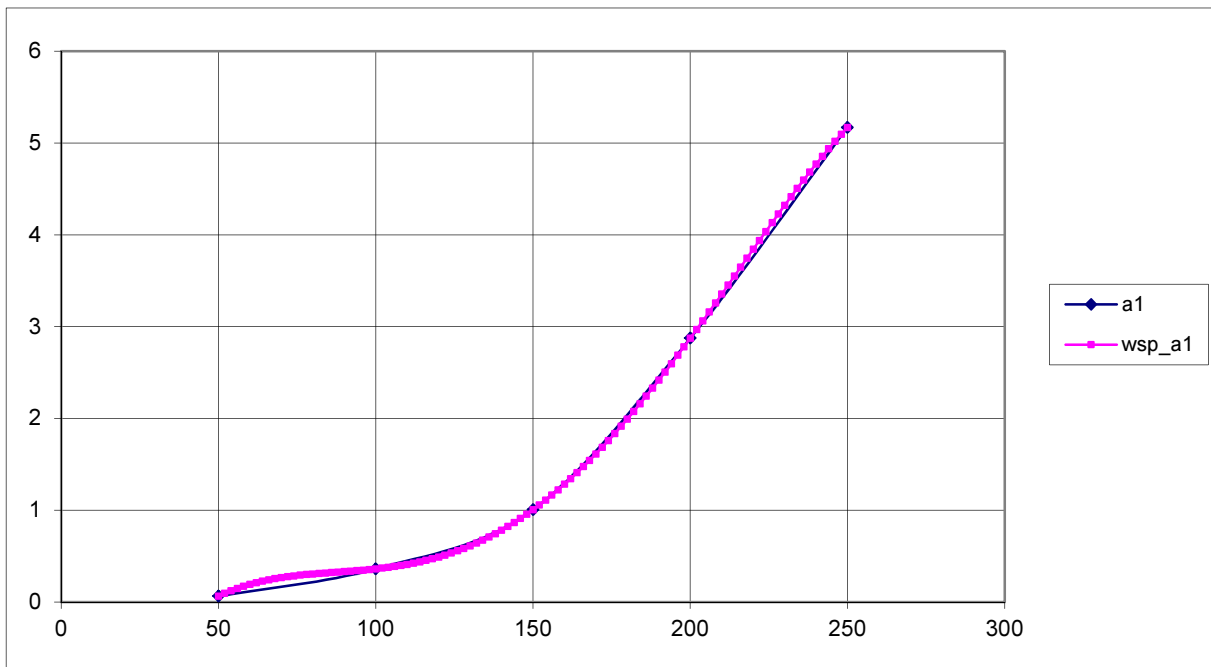
Rys. 21 Wykres porównawczy współczynnika A i funkcji wsp_A_40G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



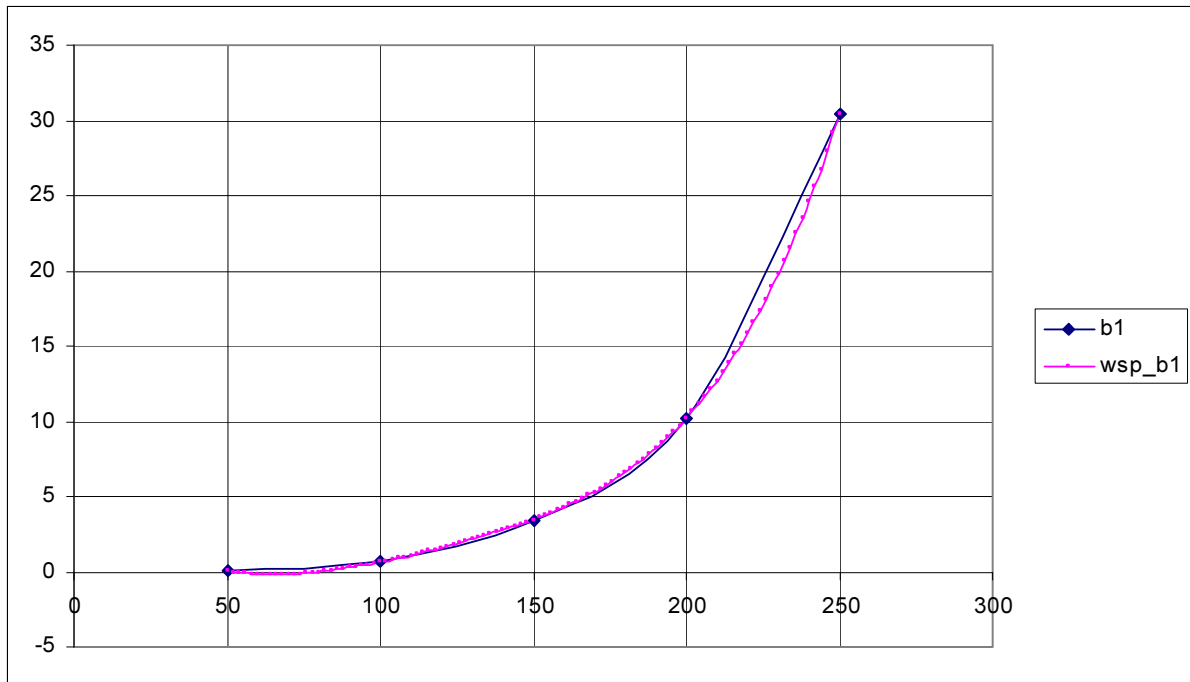
Rys. 22 Wykres porównawczy współczynnika B i funkcji wsp_B_40G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



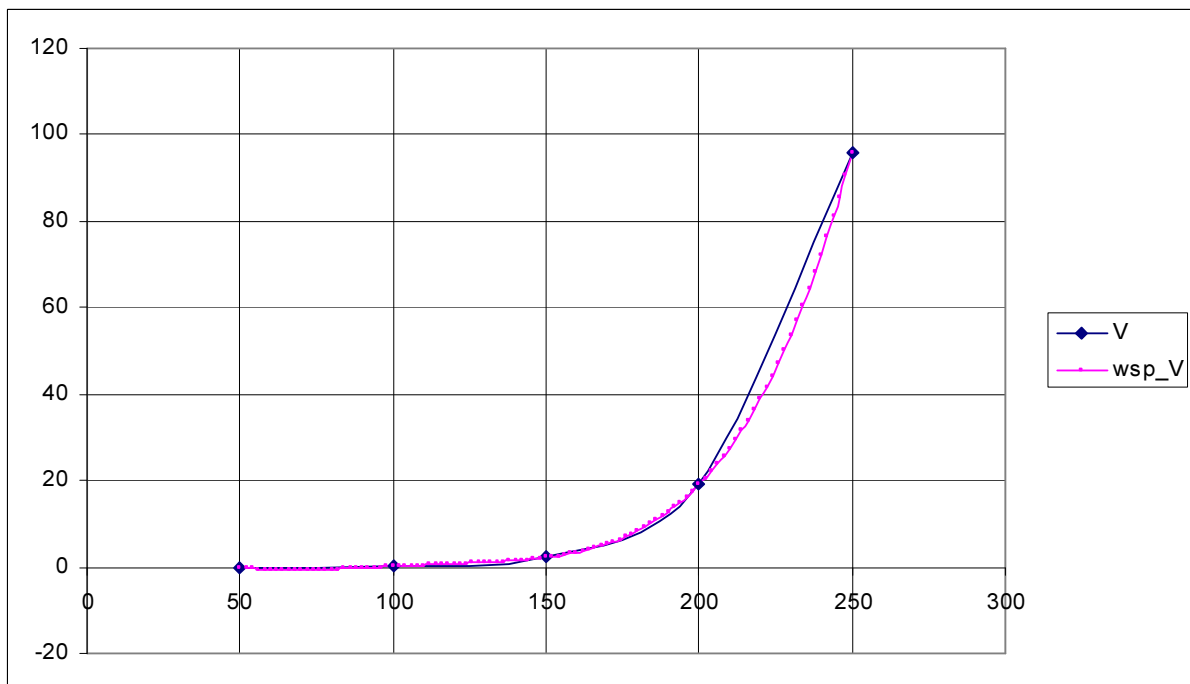
Rys. 23 Wykres porównawczy współczynnika C i funkcji wsp_C_40G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 24 Wykres porównawczy współczynnika a1 i funkcji wsp_a1_40G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 25 Wykres porównawczy współczynnika b1 i funkcji wsp_b1_40G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 26 Wykres porównawczy współczynnika V i funkcji wsp_V_40G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)

Mając policzone powyższe współczynniki mogę wreszcie zbudować funkcję liczącą entalpię dla argumentów danych z tego przedziału czyli $0,01 \leq P \leq 40$ i $50 \leq T \leq 250$ w następującej postaci

$$E(T, P) = A + B \cdot f1 + C \cdot f2$$

gdzie

$$A = \text{wsp_}A(T)$$

$$B = \text{wsp_}B(T)$$

$$C = \text{wsp_}C(T)$$

$$a1 = \text{wsp_}a1(T)$$

$$b1 = \text{wsp_}b1(T)$$

$$V = \text{wsp_}V(T)$$

natomiast

$$f1 = (P - a1)$$

$$f2 = (P - b1) \cdot f1 - V$$

(36)

Porównałem wyniki obliczeń entalpii za pomocą powyższej funkcji z wynikami obliczeń uzyskanymi dla poszczególnych izoterm za pomocą równania (33) i są one identyczne więc błąd pokazany na (Rys 19) będzie dla tego przedziału obliczeń również błędem ostatecznym.

Listing tej funkcji Ent_40G w Visual Basic wygląda następująco:

```
Function Ent_40G(ByVal T As Double, ByVal P As Double) As Double
Dim A, B, C, a1, b1, V, f1, f2 As Double
```

```
    A = wsp_A_40G(T)
```

```
    B = wsp_B_40G(T)
```

```
    C = wsp_C_40G(T)
```

```
    a1 = wsp_a1_40G(T)
```

```
    b1 = wsp_b1_40G(T)
```

```
    V = wsp_V_40G(T)
```

(37)

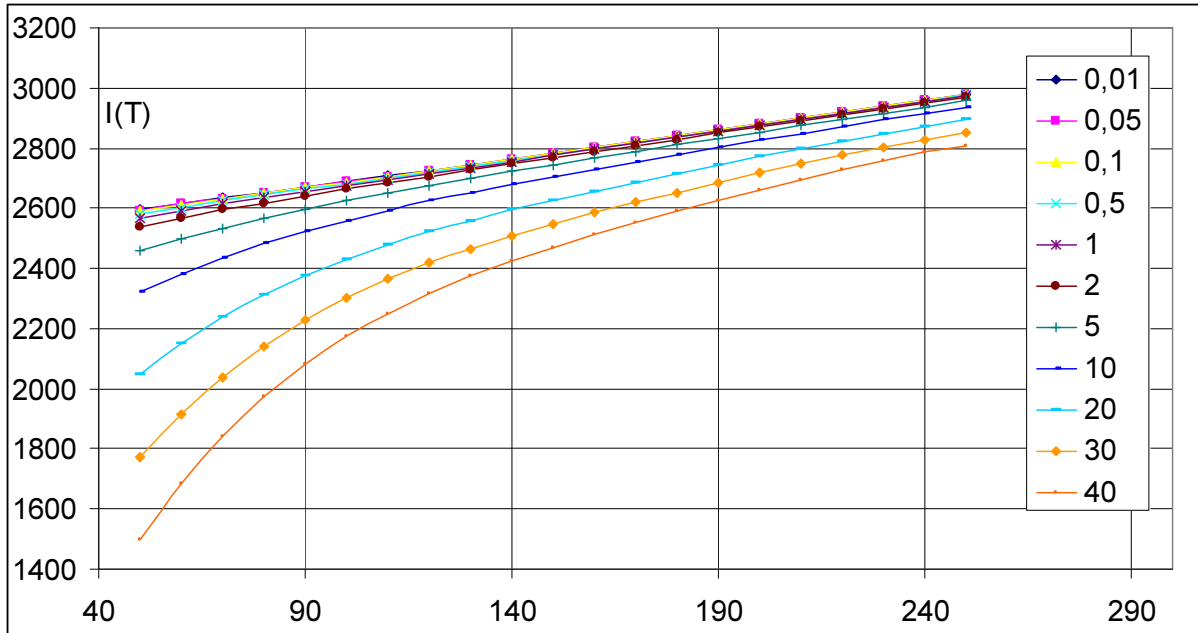
```
    f1 = (P - a1)
```

```
    f2 = (P - b1) * f1 - V
```

```
    Ent_40G = A + B * f1 + C * f2
```

```
End Function
```

Za pomocą funkcji Ent_40G możemy zbudować tabelkę wartości entalpii dla izobar z zakresu 0,01 – 40 bar i przedstawić je na wykresie.



Rys. 27 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_40G dla zakresu argumentów z przedziału 0,01-40 bar i 50-250°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonyj po prawej stronie ramce (opracowanie własne)

Dokonując dalszej analizy dla przedziału 300 - 1100°C znalazłem największe odchylenie względne dla izoterm danych wzorem (33) od wartości doświadczalnych. Występuje ono dla izotermi I_40_300 w punkcie 20 bar i wynosi 0,13 J/kg

P	I_300	g2(Pi)	f(Pi)g2(Pi)	g22(Pi)	Pig22(Pi)	Pi(1)	Pi(2)		I_300_P	r
0,01	3076,96	61,89731	190455,3	3831,277	38,31277	3077,66	3076,93	-2,831861407 B	3076,934776	0,02
0,02	3076,93	61,53936	189352,4	3787,093	75,74185	3077,64	3076,91	-0,011776782 C	3076,910673	0,02
0,04	3076,88	60,82406	187148,5	3699,566	147,9827	3077,58	3076,86	5,183888889 a1	3076,86246	0,02
0,06	3076,83	60,10956	184947,1	3613,16	216,7896	3077,52	3076,81	30,64099941 b1	3076,814237	0,02
0,08	3076,79	59,39587	182748,3	3527,869	282,2295	3077,47	3076,77	96,58407932 V	3076,766005	0,02
0,1	3076,74	58,68297	180552	3443,691	344,3691	3077,41	3076,72		3076,717763	0,02
0,2	3076,49	55,13048	169608,5	3039,37	607,874	3077,13	3076,48		3076,476414	0,02
0,4	3076,00	48,0855	147911,2	2312,215	924,8862	3076,56	3075,99		3075,993009	0,01
0,6	3075,51	41,12052	126466,8	1690,897	1014,538	3075,99	3075,51		3075,508662	0,01
0,8	3075,02	34,23555	105275,1	1172,073	937,6581	3075,43	3075,02		3075,023372	0,00
1	3074,53	27,43057	84336,19	752,4361	752,4361	3074,86	3074,54		3074,537141	0,00
2	3072,07	-5,39432	-16571,71	29,09868	58,19737	3072,03	3072,09		3072,091851	-0,02
4	3067,08	-65,0441	-199495,3	4230,734	16922,94	3066,36	3067,13		3067,13061	-0,05
6	3062,01	-116,6939	-357317,8	13617,46	81704,76	3060,7	3062,08		3062,075156	-0,07
8	3056,86	-160,3436	-490148,4	25710,09	205680,7	3055,04	3056,93		3056,925487	-0,06
10	3051,63	-195,9934	-598099,9	38413,42	384134,2	3049,37	3051,68		3051,681604	-0,05
20	3024,18	-254,2423	-768875,1	64639,15	1292783	3021,05	3024,05		3024,048974	0,13
40	2961,69	229,2599	678997,3	52560,11	2102405	2964,42	2961,72		2961,717645	-0,03
93,31	55134,22	0	-2709,481	230069,7	4089031	55134,2	55134,2			
α_n		17,77301				31,9443	0,03531			
β_n		132,337								
λ_n		-0,011777								

Rys. 28 Tabelka zależności entalpii od ciśnienia dla 300°C współczynniki oraz błąd bezwzględny aproksymacji (opracowanie własne)

Wracamy teraz do tabelki współczynników (Rys 17) jak już wcześniej pisałem wynika z niej że od $T=300^{\circ}\text{C}$ w górę współczynniki a_1 , b_1 i V mają wartości stałe i w celu dalszej analizy musimy dokonać jedynie aproksymacji wartości A , B i C . Wstawiam je więc do odpowiednich tabelek aproksymacyjnych i otrzymuję:

T_i	A	$g_0(\text{Pi})$	$g_1(\text{Pi})$	$g_4(\text{Pi})$	$f(\text{Pi})g_4(\text{Pi})$	$g_{42}(\text{Pi})$	$\text{Pi}g_{42}(\text{Pi})$	$\text{Pi}(4)$	
300	3063,012	1	-400	3,9E+09	1,2E+13	1,5E+19	4,6E+21	3063,20672	3946,487628 A
350	3167,234	1	-350	-1E+09	-3E+12	9,5E+17	3,3E+20	3167,00615	2,283880906 B
400	3271,815	1	-300	-3E+09	-1E+13	8,6E+18	3,4E+21	3271,66002	0,000319746 C
450	3377,367	1	-250	-3E+09	-1E+13	8,6E+18	3,9E+21	3377,36565	5,07659E-08 D
500	3484,193	1	-200	-2E+09	-6E+12	3,2E+18	1,6E+21	3484,29588	-1,6334E-10 E
550	3592,466	1	-150	-2E+08	-8E+11	5,1E+16	2,8E+19	3592,59905	700 a1
600	3702,298	1	-100	1,3E+09	4,7E+12	1,6E+18	9,8E+20	3702,39896	700 b1
650	3813,761	1	-50	2,3E+09	8,9E+12	5,4E+18	3,5E+21	3813,79496	700 c1
700	3926,9	1	0	2,7E+09	1,1E+13	7,3E+18	5,1E+21	3926,86187	700 d1
750	4041,74	1	50	2,3E+09	9,4E+12	5,4E+18	4,1E+21	4041,65001	60000 V
800	4158,291	1	100	1,3E+09	5,3E+12	1,6E+18	1,3E+21	4158,18521	47500 X
850	4276,547	1	150	-2E+08	-1E+12	5,1E+16	4,3E+19	4276,46879	45000 Y
900	4396,492	1	200	-2E+09	-8E+12	3,2E+18	2,9E+21	4396,47757	
950	4518,102	1	250	-3E+09	-1E+13	8,6E+18	8,1E+21	4518,16387	
1000	4641,342	1	300	-3E+09	-1E+13	8,6E+18	8,6E+21	4641,45552	
1050	4766,174	1	350	-1E+09	-5E+12	9,5E+17	1E+21	4766,25583	
1100	4892,555	1	400	3,9E+09	1,9E+13	1,5E+19	1,7E+22	4892,44362	
11900	67090,29	17	0	0	-2E+10	9,4E+19	6,6E+22	67090,2897	
α_n		700	700	700				0,2162366	
β_n			60000	43333,3					
λ_n		3946,488	2,283881	-2E-10					

T_i	B	$g_0(\text{Pi})$	$g_1(\text{Pi})$	$g_4(\text{Pi})$	$f(\text{Pi})g_4(\text{Pi})$	$g_{42}(\text{Pi})$	$\text{Pi}g_{42}(\text{Pi})$	$\text{Pi}(4)$	
300	-2,831861	1	-400	3,9E+09	-1E+10	1,5E+19	4,6E+21	-2,784424	-0,870019385 A
350	-2,088389	1	-350	-1E+09	2E+09	9,5E+17	3,3E+20	-2,1451491	0,002541257 B
400	-1,629738	1	-300	-3E+09	4,8E+09	8,6E+18	3,4E+21	-1,6665841	-5,5685E-06 C
450	-1,317362	1	-250	-3E+09	3,9E+09	8,6E+18	3,9E+21	-1,3161468	1,17068E-08 D
500	-1,090915	1	-200	-2E+09	2E+09	3,2E+18	1,6E+21	-1,0649166	-2,44126E-11 E
550	-0,919576	1	-150	-2E+08	2,1E+08	5,1E+16	2,8E+19	-0,8876349	700 a1
600	-0,785802	1	-100	1,3E+09	-1E+09	1,6E+18	9,8E+20	-0,762705	700 b1
650	-0,678796	1	-50	2,3E+09	-2E+09	5,4E+18	3,5E+21	-0,6721921	700 c1
700	-0,591519	1	0	2,7E+09	-2E+09	7,3E+18	5,1E+21	-0,6018234	700 d1
750	-0,51918	1	50	2,3E+09	-1E+09	5,4E+18	4,1E+21	-0,5409876	60000 V
800	-0,4584	1	100	1,3E+09	-6E+08	1,6E+18	1,3E+21	-0,4827358	47500 X
850	-0,406733	1	150	-2E+08	9,2E+07	5,1E+16	4,3E+19	-0,4237806	45000 Y
900	-0,362361	1	200	-2E+09	6,5E+08	3,2E+18	2,9E+21	-0,3644967	
950	-0,323914	1	250	-3E+09	9,5E+08	8,6E+18	8,1E+21	-0,3089207	
1000	-0,290334	1	300	-3E+09	8,5E+08	8,6E+18	8,6E+21	-0,2647509	
1050	-0,260797	1	350	-1E+09	2,5E+08	9,5E+17	1E+21	-0,2433478	
1100	-0,234652	1	400	3,9E+09	-9E+08	1,5E+19	1,7E+22	-0,2597334	
11900	-14,79033	17	0	0	-2E+09	9,4E+19	6,6E+22	-14,79033	
α_n		700	700	700				0,01238631	
β_n			60000	43333,3					
λ_n		-0,870019	0,002541	-2E-11					

Rys. 29 Tabelki zależności współczynników aproksymacyjnych od temperatur dla zakresu 300-1100°C (opracowanie własne)

T _i	C	g0(Pi)	g1(Pi)	g4(Pi)	f(Pi)g4(Pi)	g42(Pi)	Pig42(Pi)	Pi(4)	
300	-0,011777	1	-400	3,9E+09	-5E+07	1,5E+19	4,6E+21	-0,0109437	-0,001367186 A
350	-0,005214	1	-350	-1E+09	5083899	9,5E+17	3,3E+20	-0,0062754	7,77311E-06 B
400	-0,002613	1	-300	-3E+09	7643379	8,6E+18	3,4E+21	-0,0031971	-3,10818E-08 C
450	-0,001425	1	-250	-3E+09	4168739	8,6E+18	3,9E+21	-0,0013338	1,03317E-10 D
500	-0,000826	1	-200	-2E+09	1487417	3,2E+18	1,6E+21	-0,0003564	-3,04978E-13 E
550	-0,000501	1	-150	-2E+08	112776	5,1E+16	2,8E+19	1,8322E-05	700 a1
600	-0,000314	1	-100	1,3E+09	-400778	1,6E+18	9,8E+20	2,8085E-05	700 b1
650	-0,000202	1	-50	2,3E+09	-469553	5,4E+18	3,5E+21	-0,0001353	700 c1
700	-0,000132	1	0	2,7E+09	-356188	7,3E+18	5,1E+21	-0,0003257	700 d1
750	-8,7E-05	1	50	2,3E+09	-202276	5,4E+18	4,1E+21	-0,0004428	60000 V
800	-5,75E-05	1	100	1,3E+09	-73333	1,6E+18	1,3E+21	-0,000432	47500 X
850	-3,78E-05	1	150	-2E+08	8505,91	5,1E+16	4,3E+19	-0,0002843	45000 Y
900	-2,44E-05	1	200	-2E+09	43981,4	3,2E+18	2,9E+21	-3,674E-05	
950	-1,53E-05	1	250	-3E+09	44657,1	8,6E+18	8,1E+21	0,00022814	
1000	-8,94E-06	1	300	-3E+09	26137,9	8,6E+18	8,6E+21	0,00038194	
1050	-4,55E-06	1	350	-1E+09	4432,6	9,5E+17	1E+21	0,00025056	
1100	-1,5E-06	1	400	3,9E+09	-5861,2	1,5E+19	1,7E+22	-0,0003859	
11900	-0,023242	17	0	0	-3E+07	9,4E+19	6,6E+22	-0,0232422	
α _n		700	700	700				3,5722E-06	
β _n			60000	43333,3					
λ _n		-0,001367	7,77E-06	-3E-13					

Rys. 30 cd. Tabelki zależności współczynników aproksymacyjnych od temperatur dla zakresu 300-1100°C (opracowanie własne)

Do aproksymacji tych 3-ch współczynników użyłem wielomianów stopnia 4-go a następnie stworzyłem dla każdego z nich funkcję aproksymującą `wsp_A_40H`, `wsp_B_40H` i `wsp_C_40H`. Listing analogiczny jak (35) dla przykładowej funkcji `wsp_B_40H` przedstawiam poniżej

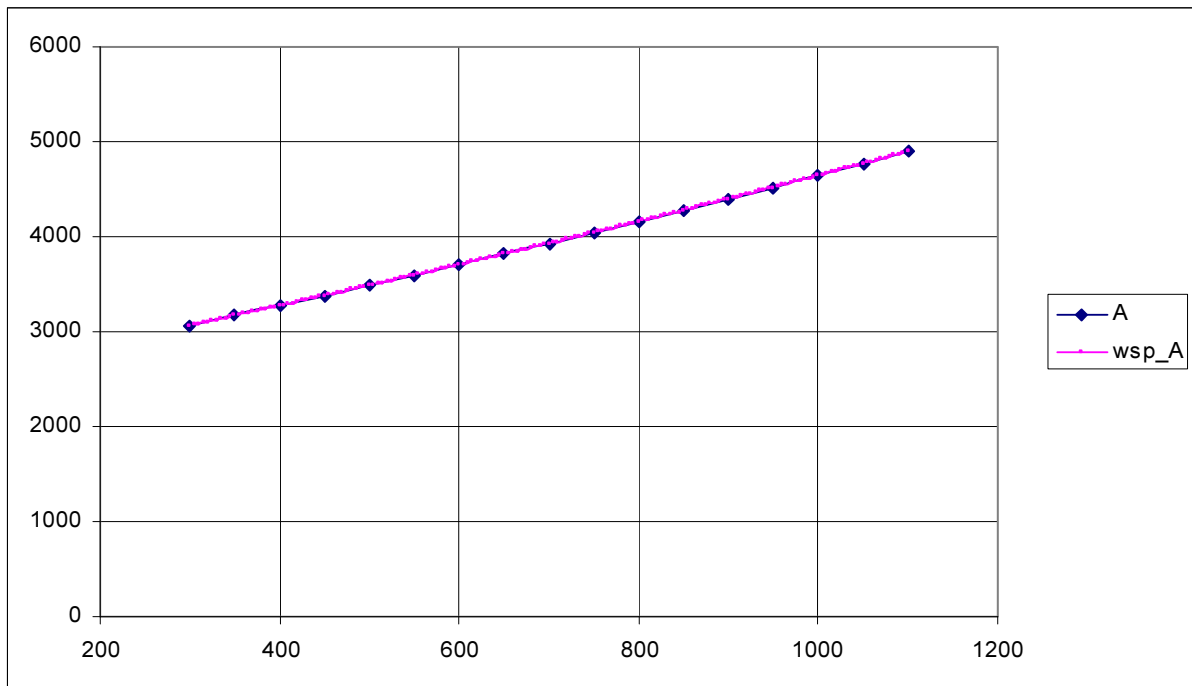
```
Function wsp_B_40H(ByVal T As Double) As Double 'T=300-1100
Dim A, B, C, D, E, a1, b1, c1, d1, V, X, Y, f1, f2, f3, f4 As Double
```

```
A = -0.870019384977145
B = 2.54125727980401E-03
C = -5.56850130045313E-06
D = 1.17067809792874E-08
E = -2.44126131392301E-11
a1 = 700
b1 = 700
c1 = 700
d1 = 700
V = 60000
X = 47500
Y = 45000
```

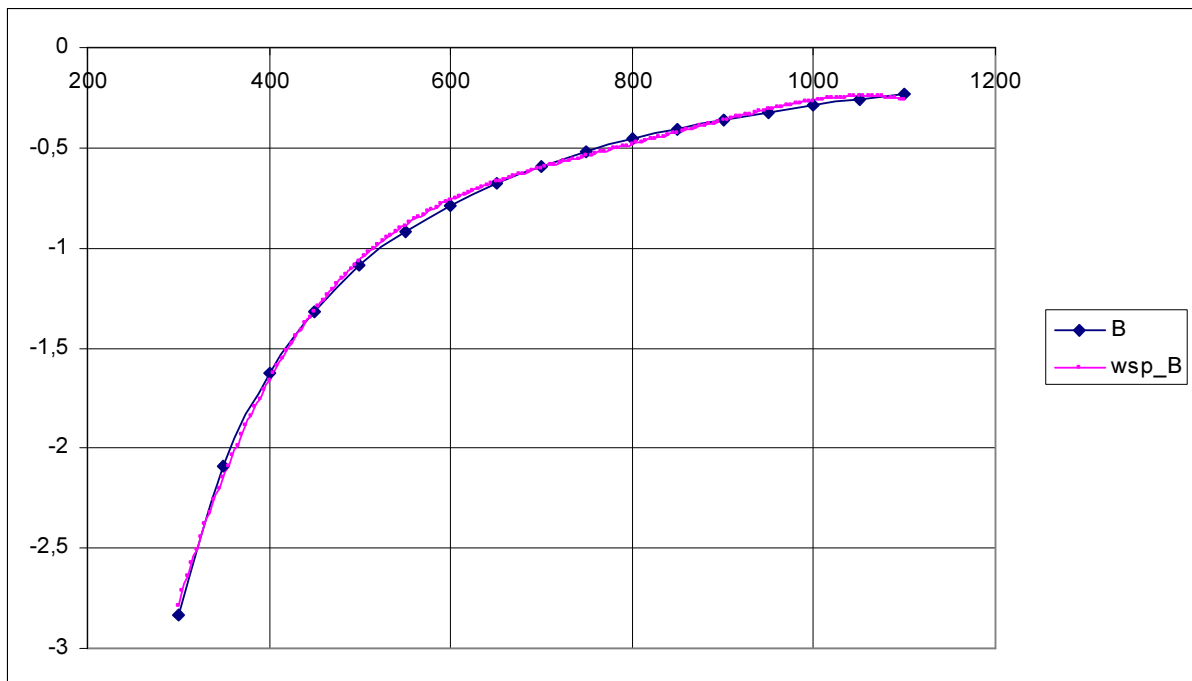
```
f1 = (T - a1)
f2 = (T - b1) * f1 - V
f3 = (T - c1) * f2 - X * f1
f4 = (T - d1) * f3 - Y * f2
wsp_B_40H = A + B * f1 + C * f2 + D * f3 + E * f4
End Function
```

(38)

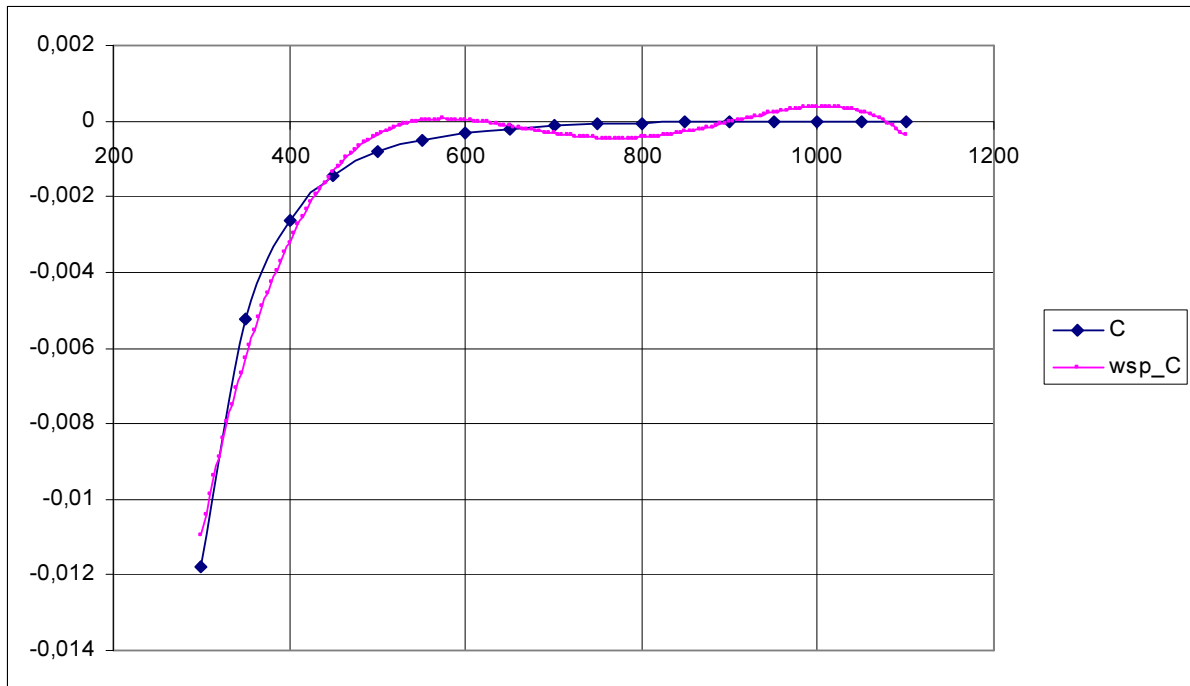
Graficzne porównanie wartości obliczonych za pomocą tych funkcji i wartości źródłowych wygląda następująco:



Rys. 31 Wykres porównawczy współczynnika A i funkcji wsp_A_40H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 32 Wykres porównawczy współczynnika B i funkcji wsp_B_40H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 33 Wykres porównawczy współczynnika C i funkcji wsp_C_40H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)

Mając policzone współczynniki A, B, C, a1, b1 i V zbudowałem oparta na nich następującą funkcję liczącą entalpię

```
Function Ent_40H(ByVal T As Double, ByVal P As Double) As Double
Dim A, B, C, a1, b1, V, f1, f2 As Double
```

```
A = wsp_A_40H(T)
B = wsp_B_40H(T)
C = wsp_C_40H(T)
a1 = 5.18388888888889
b1 = 30.6409994053462
V = 96.5840793209877
```

(39)

```
f1 = (P - a1)
f2 = (P - b1) * f1 - V
Ent_40H = A + B * f1 + C * f2
```

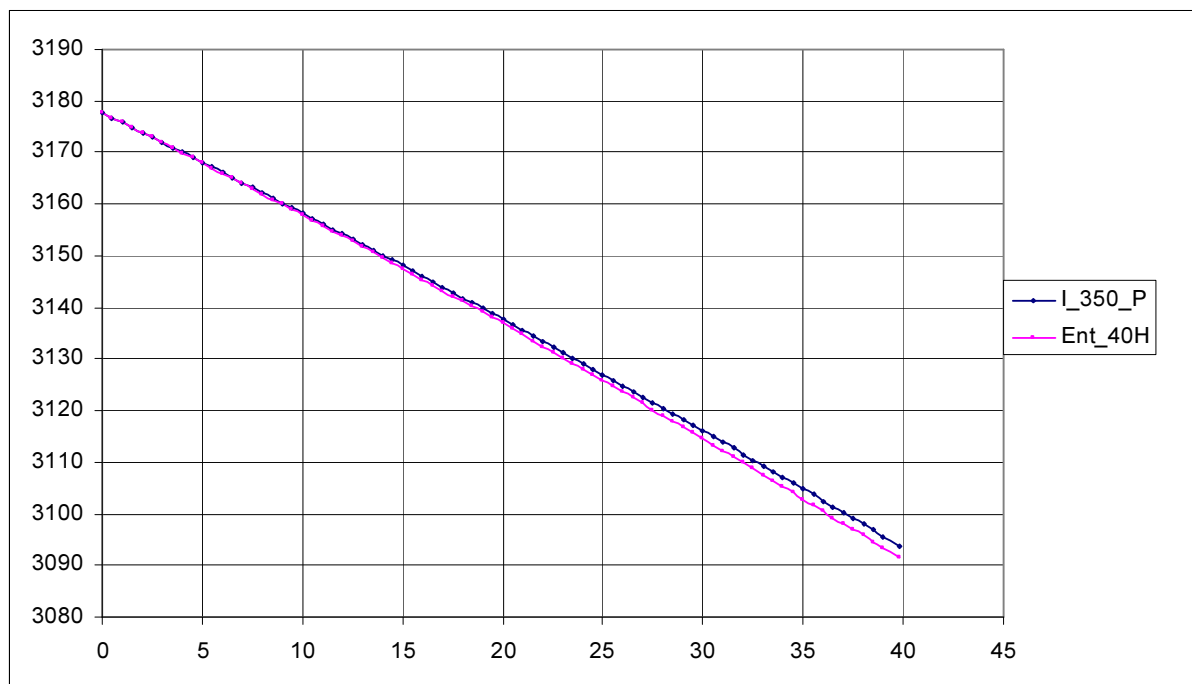
End Function

Porównując wyniki tej funkcji z wynikami funkcji poszczególnych izoterm dla danych źródłowych z badanego zakresu stwierdziłem że największe odchylenie bezwzględne wystąpiło dla izotermi I_350 w punkcie P = 40 bar i wyniosło 2,45 J/kg co przedstawia poniższa tabelka

P	I_350	g2(Pi)	Pi(1)	Pi(2)		I_350_P	r	Ent_4_110	350
0,01	3177,72	61,89731	3178,04	3177,72	3167,233611 A	3177,715957	0,01	3177,71648	0,00
0,02	3177,70	61,53936	3178,02	3177,7	-2,088389394 B	3177,69694	0,01	3177,697275	0,00
0,04	3177,66	60,82406	3177,98	3177,66	-0,005214256 C	3177,658902	0,01	3177,658861	0,00
0,06	3177,63	60,10956	3177,93	3177,62	5,183888889 a1	3177,62086	0,01	3177,620441	0,00
0,08	3177,59	59,39587	3177,89	3177,58	30,64099941 b1	3177,582813	0,01	3177,582017	0,00
0,1	3177,55	58,68297	3177,85	3177,54	96,58407932 V	3177,544763	0,00	3177,543588	0,00
0,2	3177,36	55,13048	3177,64	3177,35		3177,354447	0,00	3177,351367	0,00
0,4	3176,98	48,0855	3177,22	3176,97		3176,973504	0,00	3176,966547	0,01
0,6	3176,59	41,12052	3176,81	3176,59		3176,592143	0,00	3176,581226	0,01
0,8	3176,21	34,23555	3176,39	3176,21		3176,210365	0,00	3176,195402	0,01
1	3175,83	27,43057	3175,97	3175,83		3175,82817	0,00	3175,809077	0,02
2	3173,90	-5,39432	3173,88	3173,91		3173,910938	-0,01	3173,869919	0,04
4	3170,03	-65,0441	3169,71	3170,05		3170,045189	-0,01	3169,95395	0,09
6	3166,12	-116,6939	3165,53	3166,14		3166,137725	-0,02	3165,987777	0,15
8	3162,17	-160,3436	3161,35	3162,19		3162,188547	-0,02	3161,971401	0,22
10	3158,18	-195,9934	3157,18	3158,2		3158,197656	-0,01	3157,904821	0,29
20	3137,65	-254,2423	3136,29	3137,62		3137,617486	0,04	3136,818868	0,80
40	3093,32	229,2599	3094,52	3093,33		3093,328594	-0,01	3090,881693	2,45
93,31	57010,21	0	57010,2	57010,2					
α_n		17,77301	6,25771	0,00247					
β_n		132,337							
λ_n		-0,005214							

Rys. 34 Tabelka zależności entalpii od ciśnienia dla 350°C współczynniki oraz błąd bezwzględny aproksymacji dla izotermi I_350_P i funkcji ostatecznej Ent_40H (opracowanie własne)

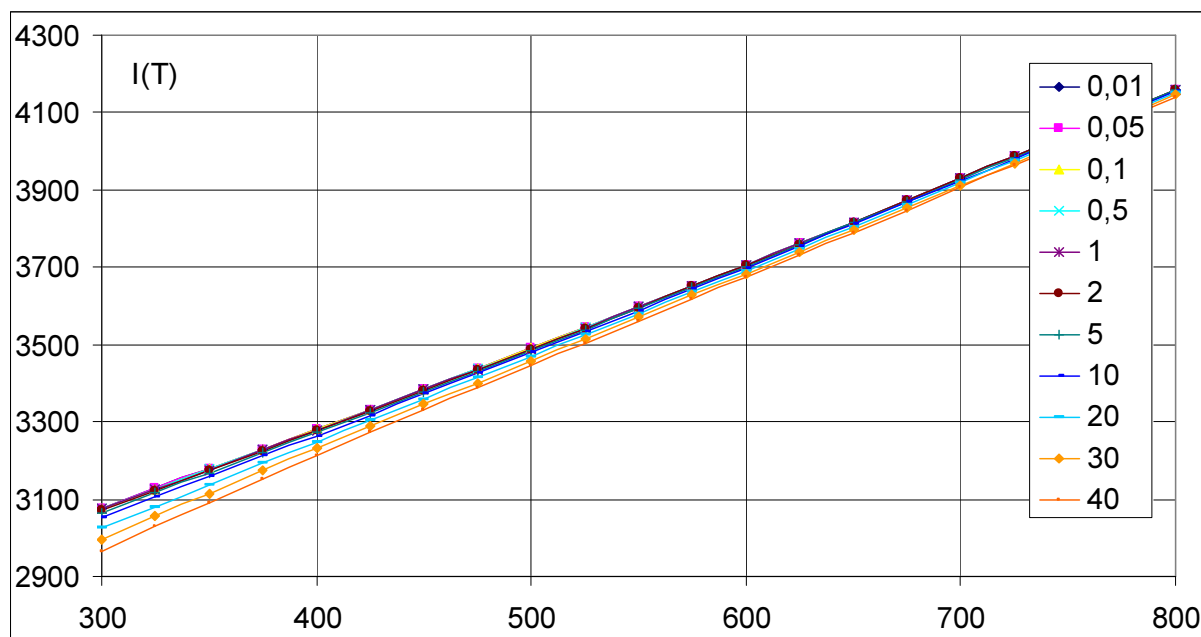
Graficzne porównanie wartości izotermi I_350_P i wartości funkcji ostatecznej przedstawiam poniżej



Rys. 35 Wykres porównawczy entalpii dla punktów izotermi I_350(P) i funkcji Ent_40H (opracowanie własne)

Odchylenie bezwzględne rzędu 2,45 J/kg daje w przeliczeniu na wartości funkcji w tym punkcie odchylenie względne rzędu $\Delta\% = 2,45 / 3093,32 = 0,08\%$

Za pomocą funkcji Ent_40H możemy zbudować tabelkę wartości entalpii dla izobar z zakresu 0,01 – 40 bar i przedstawić je na wykresie.



Rys. 36 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_40H dla zakresu argumentów z przedziału 0,01-40 bar i 300-1100°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)

2.3 Budowa funkcji aproksymującej entalpię pary wodnej nasyconej w zakresie ciśnień od 40 do 800 bar

Drugim zakresem ciśnień w którym będę budował funkcję entalpii jest zakres 40 – 800 bar. Zakres ten wybrałem doświadczalnie analizując zachodzące w nim zmiany wartości entalpii i odchylenia od tych wartości które otrzymywałem podstawiając je do wielomianów aproksymacyjnych. Zakres ten oczywiście można by zwiększać stosując wielomiany coraz to wyższego stopnia wydaje mi się jednak że dokonałem rozsądnego kompromisu wybierając ten właśnie zakres i stosując wielomiany stopnia 4-go. Niestety entalpia dla temperatur z zakresu 250 - 500°C w tym przedziale ciśnień wykazuje tak znaczne odstępstwa od pozostałego zakresu że zajmę się nią w następnym rozdziale a w tym zbuduję jedynie funkcje entalpii dla zakresu 500 - 1100 °C.

Zebrałem z tabeli danych (Rys 7) wartości dla tego zakresu i umieściłem je w arkuszu do obliczeń współczynników aproksymacji. Poniżej pierwsza i ostatnia z tabeli aproksymacyjnych wraz z obliczonymi (po prawej stronie) współczynnikami

P_i	I_{500}	$p_4(T_i)$	$f(T_i)p_4(T_i)$	$p_4^2(T_i)$	$T_i p_4^2(T_i)$	$T_i(1)$	$T_i(2)$	$T_i(3)$	$T_i(4)$	
60	3423,11	1,4E+09	4,9E+12	2,1E+18	1,2E+20	3424,19	3442,89	3419,52	3422,45401	3044,734815 A
80	3399,49	-4E+07	-1E+11	1,4E+15	1,1E+17	3395	3407,65	3399,84	3399,762648	-1,45942494 B
100	3375,13	-1E+09	-4E+12	1,1E+18	1,1E+20	3365,81	3372,76	3378,13	3375,951945	0,000447106 C
200	3241,18	-2E+09	-5E+12	2,7E+18	5,3E+20	3219,87	3203,68	3243,91	3240,566462	2,83372E-06 D
400	2906,49	2,6E+09	7,5E+12	6,6E+18	2,7E+21	2927,98	2892,36	2901,46	2906,742623	2,04824E-09 E
600	2570,31	-2E+09	-4E+12	2,9E+18	1,7E+21	2636,1	2616,8	2573,68	2570,216237	320 a1
800	2397,43	4,2E+08	1E+12	1,8E+17	1,4E+20	2344,21	2377,01	2396,59	2397,449783	497,4244833 b1
2240	21313,14	1,4E-06	3,2E+10	1,6E+19	5,3E+21	21313,1	21313,1	21313,1	21313,14371	475,6496128 c1
α_n		340,184				8184,33	4646,88	66,8489	1,639146464	397,2708219 d1
β_n		27251,8								71885,71429 V
λ_n		2E-09								35166,47596 X
										32231,80975 Y

P_i	I_{1100}	$p_4(T_i)$	$f(T_i)p_4(T_i)$	$p_4^2(T_i)$	$T_i p_4^2(T_i)$	$T_i(1)$	$T_i(2)$	$T_i(3)$	$T_i(4)$	
60	4879,69	1,4E+09	7E+12	2,1E+18	1,2E+20	4878,76	4879,85	4879,7	4879,691699	4820,935858 A
80	4875,00	-4E+07	-2E+11	1,4E+15	1,1E+17	4874,31	4875,05	4875	4875,000138	-0,22240325 B
100	4870,31	-1E+09	-5E+12	1,1E+18	1,1E+20	4869,86	4870,27	4870,3	4870,311116	2,60433E-05 C
200	4846,95	-2E+09	-8E+12	2,7E+18	5,3E+20	4847,62	4846,68	4846,94	4846,94905	1,80336E-08 D
400	4801,11	2,6E+09	1,2E+13	6,6E+18	2,7E+21	4803,14	4801,07	4801,13	4801,108444	-6,98365E-12 E
600	4757,28	-2E+09	-8E+12	2,9E+18	1,7E+21	4758,66	4757,54	4757,26	4757,276257	320 a1
800	4716,21	4,2E+08	2E+12	1,8E+17	1,4E+20	4714,18	4716,09	4716,22	4716,214299	497,4244833 b1
2240	33746,55	1,4E-06	-1E+08	1,6E+19	5,3E+21	33746,6	33746,6	33746,6	33746,551	475,6496128 c1
α_n		340,184				12,1885	0,18625	0,00076	2,53858E-07	397,2708219 d1
β_n		27251,8								71885,71429 V
λ_n		-7E-12								35166,47596 X
										32231,80975 Y

Rys. 37 Tabelka zależności entalpii od ciśnienia dla izoterm 500°C i 1100°C oraz obliczone współczynniki aproksymacji (opracowanie własne)

Obliczone tak jak powyżej współczynniki aproksymacji dla poszczególnych izoterm z zakresu 500 - 1100°C zebrałem w poniższą tabelkę:

	A	B	C	D	E	a1	b1	c1	d1	V
500	3044,7348	-1,459425	0,0004471	2,834E-06	2,048E-09	320	497,42448	475,64961	397,27082	71885,714
550	3246,7696	-1,149304	8,665E-05	1,152E-06	1,091E-09	"	"	"	"	"
600	3423,0231	-0,9173	2,254E-05	5,137E-07	3,528E-10	"	"	"	"	"
650	3582,2563	-0,750619	2,214E-05	2,757E-07	1,149E-10	"	"	"	"	"
700	3731,0467	-0,62834	2,851E-05	1,686E-07	3,609E-11	"	"	"	"	"
750	3873,5007	-0,535357	3,265E-05	1,121E-07	7,414E-12	"	"	"	"	"
800	4012,1033	-0,462276	3,429E-05	7,877E-08	-3,56E-12	"	"	"	"	"
850	4148,4006	-0,403258	3,426E-05	5,77E-08	-7,64E-12	"	"	"	"	"
900	4283,393	-0,354546	3,324E-05	4,367E-08	-8,85E-12	"	"	"	"	"
950	4417,7491	-0,313624	3,167E-05	3,394E-08	-8,86E-12	"	"	"	"	"
1000	4551,9276	-0,27874	2,985E-05	2,698E-08	-8,36E-12	"	"	"	"	"
1050	4686,2483	-0,248641	2,794E-05	2,187E-08	-7,69E-12	"	"	"	"	"
1100	4820,9359	-0,222403	2,604E-05	1,803E-08	-6,98E-12	"	"	"	"	"

Rys. 38 Tabelka współczynników aproksymacji dla poszczególnych izoterm z zakresu 500 - 1100°C (opracowanie własne)

Współczynniki A, B, C, D i E umieściłem w tabelkach do obliczania ich aproksymacji

T_i	A	$g4(Pi)$	$f(Pi)g4(Pi)$	$g42(Pi)$	$Pig42(Pi)$	$Pi(1)$	$Pi(2)$	$Pi(3)$	$Pi(4)$	
500	3044,735	1,1E+09	3,2E+12	1,1E+18	5,6E+20	3120,72	3073,02	3051,58	3045,91675	3986,314541 A
550	3246,77	-7E+08	-2E+12	5E+17	2,8E+20	3264,99	3241,14	3241,14	3244,91552	2,885306438 B
600	3423,023	-1E+09	-4E+12	1,1E+18	6,3E+20	3409,25	3404,92	3416,61	3422,1057	-0,00086728 C
650	3582,256	-6E+08	-2E+12	3,3E+17	2,2E+20	3553,52	3564,36	3579,95	3583,04235	2,59864E-06 D
700	3731,047	1,2E+08	4,4E+11	1,4E+16	9,7E+18	3697,78	3719,47	3733,11	3732,47914	-5,34231E-09 E
750	3873,501	6,9E+08	2,7E+12	4,7E+17	3,5E+20	3842,05	3870,24	3878,03	3874,36844	800 a1
800	4012,103	9E+08	3,6E+12	8,1E+17	6,5E+20	3986,31	4016,67	4016,67	4011,86125	800 b1
850	4148,401	6,9E+08	2,8E+12	4,7E+17	4E+20	4130,58	4158,77	4150,97	4147,30722	800 c1
900	4283,393	1,2E+08	5E+11	1,4E+16	1,3E+19	4274,85	4296,53	4282,88	4282,25466	800 d1
950	4417,749	-6E+08	-3E+12	3,3E+17	3,2E+20	4419,11	4429,95	4414,36	4417,45054	35000 V
1000	4551,928	-1E+09	-5E+12	1,1E+18	1,1E+21	4563,38	4559,04	4547,35	4552,84048	27500 X
1050	4686,248	-7E+08	-3E+12	5E+17	5,3E+20	4707,64	4683,79	4683,79	4687,56874	25714,28571 Y
1100	4820,936	1,1E+09	5,1E+12	1,1E+18	1,2E+21	4851,91	4804,21	4825,64	4819,97824	
10400	51822,09	0	-4E+10	7,8E+18	6,3E+21	51822,1	51822,1	51822,1	51822,089	
α_n		800				11822,6	2411,01	238,243	15,231721	
β_n		24285,7								
λ_n		-5E-09								

T_i	B	$g4(Pi)$	$f(Pi)g4(Pi)$	$g42(Pi)$	$Pig42(Pi)$	$Pi(1)$	$Pi(2)$	$Pi(3)$	$Pi(4)$	
500	-1,459425	1,1E+09	-2E+09	1,1E+18	5,6E+20	-1,1371	-1,3673	-1,441	-1,4580037	-0,594141001 A
550	-1,149304	-7E+08	8,1E+08	5E+17	2,8E+20	-1,0466	-1,1617	-1,1617	-1,1504021	0,001809929 B
600	-0,9173	-1E+09	9,4E+08	1,1E+18	6,3E+20	-0,9561	-0,9771	-0,9368	-0,9203772	-4,18497E-06 C
650	-0,750619	-6E+08	4,3E+08	3,3E+17	2,2E+20	-0,8656	-0,8133	-0,7597	-0,7504307	8,93931E-09 D
700	-0,62834	1,2E+08	-7E+07	1,4E+16	9,7E+18	-0,7751	-0,6705	-0,6236	-0,625463	-1,59907E-11 E
750	-0,535357	6,9E+08	-4E+08	4,7E+17	3,5E+20	-0,6846	-0,5486	-0,5218	-0,5327732	800 a1
800	-0,462276	9E+08	-4E+08	8,1E+17	6,5E+20	-0,5941	-0,4477	-0,4477	-0,4620588	800 b1
850	-0,403258	6,9E+08	-3E+08	4,7E+17	4E+20	-0,5036	-0,3676	-0,3945	-0,4054161	800 c1
900	-0,354546	1,2E+08	-4E+07	1,4E+16	1,3E+19	-0,4131	-0,3085	-0,3555	-0,3573399	800 d1
950	-0,313624	-6E+08	1,8E+08	3,3E+17	3,2E+20	-0,3227	-0,2703	-0,324	-0,3147237	35000 V
1000	-0,27874	-1E+09	2,9E+08	1,1E+18	1,1E+21	-0,2322	-0,2531	-0,2933	-0,2768594	27500 X
1050	-0,248641	-7E+08	1,8E+08	5E+17	5,3E+20	-0,1417	-0,2567	-0,2567	-0,2454376	25714,28571 Y
1100	-0,222403	1,1E+09	-2E+08	1,1E+18	1,2E+21	-0,0512	-0,2813	-0,2076	-0,2245477	
10400	-7,723833	0	-1E+08	7,8E+18	6,3E+21	-7,7238	-7,7238	-7,7238	-7,723833	
α_n		800				0,24691	0,02777	0,00206	5,9804E-05	
β_n		24285,7								
λ_n		-2E-11								

T_i	C	$g4(Pi)$	$f(Pi)g4(Pi)$	$g42(Pi)$	$Pig42(Pi)$	$Pi(1)$	$Pi(2)$	$Pi(3)$	$Pi(4)$	
500	0,000447	1,1E+09	474252	1,1E+18	5,6E+20	0,00016	0,00026	0,00035	0,00041055	6,59152E-05 A
550	8,66E-05	-7E+08	-61271	5E+17	2,8E+20	0,00014	0,00019	0,00019	0,00015591	-3,02304E-07 B
600	2,25E-05	-1E+09	-23188	1,1E+18	6,3E+20	0,00013	0,00014	8,6E-05	3,0382E-05	1,90574E-09 C
650	2,21E-05	-6E+08	-12812	3,3E+17	2,2E+20	0,00011	8,7E-05	2E-05	-1,066E-05	-1,11687E-11 D
700	2,85E-05	1,2E+08	3359,52	1,4E+16	9,7E+18	9,6E-05	4,9E-05	-1E-05	-3,801E-06	5,37281E-14 E
750	3,26E-05	6,9E+08	22385,5	4,7E+17	3,5E+20	8,1E-05	1,9E-05	-1E-05	2,243E-05	800 a1
800	3,43E-05	9E+08	30862,8	8,1E+17	6,5E+20	6,6E-05	-8E-07	-8E-07	4,757E-05	800 b1
850	3,43E-05	6,9E+08	23492,7	4,7E+17	4E+20	5,1E-05	-1E-05	2,2E-05	5,9212E-05	800 c1
900	3,32E-05	1,2E+08	3917,2	1,4E+16	1,3E+19	3,6E-05	-1E-05	4,7E-05	5,3009E-05	800 d1
950	3,17E-05	-6E+08	-18326	3,3E+17	3,2E+20	2,1E-05	-3E-06	6,4E-05	3,2675E-05	35000 V
1000	2,99E-05	-1E+09	-30708	1,1E+18	1,1E+21	5,5E-06	1,5E-05	6,5E-05	9,9791E-06	27500 X
1050	2,79E-05	-7E+08	-19761	5E+17	5,3E+20	-1E-05	4,3E-05	4,3E-05	4,7534E-06	25714,28571 Y
1100	2,6E-05	1,1E+09	27624,5	1,1E+18	1,2E+21	-2E-05	8E-05	-1E-05	4,4888E-05	
10400	0,000857	0	419828	7,8E+18	6,3E+21	0,00086	0,00086	0,00086	0,0008569	
α_n		800				1,2E-07	7,4E-08	3,3E-08	1,0897E-08	
β_n		24285,7								
λ_n		5,4E-14								

Rys. 39 Tabelki zależności współczynników aproksymacyjnych od temperatur dla zakresu 500-1100°C (opracowanie własne)

T _i	D	g4(Pi)	f(Pi)g4(Pi)	g42(Pi)	Pig42(Pi)	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)	Pi(4)	
500	2,83E-06	1,1E+09	3005,77	1,1E+18	5,6E+20	1,3E-06	2E-06	2,5E-06	2,7266E-06	4,10518E-07 A
550	1,15E-06	-7E+08	-814,6	5E+17	2,8E+20	1,1E-06	1,5E-06	1,5E-06	1,3436E-06	-2,8045E-09 B
600	5,14E-07	-1E+09	-528,37	1,1E+18	6,3E+20	9,7E-07	1E-06	7,8E-07	5,5851E-07	1,39363E-11 C
650	2,76E-07	-6E+08	-159,51	3,3E+17	2,2E+20	8,3E-07	6,6E-07	3,1E-07	1,8318E-07	-5,83357E-14 D
700	1,69E-07	1,2E+08	19,8756	1,4E+16	9,7E+18	6,9E-07	3,4E-07	3,6E-08	6,1516E-08	2,13962E-16 E
750	1,12E-07	6,9E+08	76,8422	4,7E+17	3,5E+20	5,5E-07	9,8E-08	-8E-08	6,9524E-08	800 a1
800	7,88E-08	9E+08	70,8896	8,1E+17	6,5E+20	4,1E-07	-8E-08	-8E-08	1,1531E-07	800 b1
850	5,77E-08	6,9E+08	39,5678	4,7E+17	4E+20	2,7E-07	-2E-07	-8E-09	1,3909E-07	800 c1
900	4,37E-08	1,2E+08	5,1467	1,4E+16	1,3E+19	1,3E-07	-2E-07	8,8E-08	1,1314E-07	800 d1
950	3,39E-08	-6E+08	-19,638	3,3E+17	3,2E+20	-1E-08	-2E-07	1,7E-07	4,1862E-08	35000 V
1000	2,7E-08	-1E+09	-27,754	1,1E+18	1,1E+21	-2E-07	-8E-08	1,8E-07	-3,826E-08	27500 X
1050	2,19E-08	-7E+08	-15,467	5E+17	5,3E+20	-3E-07	9,3E-08	9,3E-08	-5,866E-08	25714,28571 Y
1100	1,8E-08	1,1E+09	19,1285	1,1E+18	1,2E+21	-4E-07	3,4E-07	-1E-07	8,1347E-08	
10400	5,34E-06	0	1671,88	7,8E+18	6,3E+21	5,3E-06	5,3E-06	5,3E-06	5,3367E-06	
α _n		800				4E-12	1,6E-12	4,6E-13	9,9653E-14	
β _n		24285,7								
λ _n		2,1E-16								

T _i	E	g4(Pi)	f(Pi)g4(Pi)	g42(Pi)	Pig42(Pi)	Pi(1)	Pi(2)	Pi(3)	Pi(4)	
500	2,05E-09	1,1E+09	2,1726	1,1E+18	5,6E+20	9,3E-10	1,6E-09	1,9E-09	2,0519E-09	2,76811E-10 A
550	1,09E-09	-7E+08	-0,7715	5E+17	2,8E+20	8,2E-10	1,1E-09	1,1E-09	1,0422E-09	-2,16988E-12 B
600	3,53E-10	-1E+09	-0,3629	1,1E+18	6,3E+20	7,1E-10	7,7E-10	5,7E-10	4,3796E-10	1,13414E-14 C
650	1,15E-10	-6E+08	-0,0665	3,3E+17	2,2E+20	6E-10	4,6E-10	1,9E-10	1,2093E-10	-4,44652E-17 D
700	3,61E-11	1,2E+08	0,00425	1,4E+16	9,7E+18	4,9E-10	2,1E-10	-2E-11	-8,346E-12	1,25842E-19 E
750	7,41E-12	6,9E+08	0,00508	4,7E+17	3,5E+20	3,9E-10	1,7E-11	-1E-10	-3,039E-11	800 a1
800	-3,56E-12	9E+08	-0,0032	8,1E+17	6,5E+20	2,8E-10	-1E-10	-1E-10	-6,879E-12	800 b1
850	-7,64E-12	6,9E+08	-0,0052	4,7E+17	4E+20	1,7E-10	-2E-10	-7E-11	1,941E-11	800 c1
900	-8,85E-12	1,2E+08	-0,001	1,4E+16	1,3E+19	6E-11	-2E-10	9,7E-12	2,4563E-11	800 d1
950	-8,86E-12	-6E+08	0,00512	3,3E+17	3,2E+20	-5E-11	-2E-10	7,6E-11	3,5451E-12	35000 V
1000	-8,36E-12	-1E+09	0,0086	1,1E+18	1,1E+21	-2E-10	-1E-10	1E-10	-2,98E-11	27500 X
1050	-7,69E-12	-7E+08	0,00544	5E+17	5,3E+20	-3E-10	4,6E-11	4,6E-11	-4,276E-11	25714,28571 Y
1100	-6,98E-12	1,1E+09	-0,0074	1,1E+18	1,2E+21	-4E-10	2,5E-10	-1E-10	1,6267E-11	
10400	3,6E-09	0	0,98332	7,8E+18	6,3E+21	3,6E-09	3,6E-09	3,6E-09	3,5985E-09	
α _n		800				2,4E-18	7,8E-19	1,4E-19	1,7329E-20	
β _n		24285,7								
λ _n		1,3E-19								

Rys. 40 cd. Tabelki zależności współczynników aproksymacyjnych od temperatur dla zakresu 500-1100°C (opracowanie własne)

W oparciu o obliczone wyżej współczynniki zbudowałem w Visual Basic 5 funkcji aproksymujących każdy z nich. Poniżej przykładowy listing funkcji aproksymującej wsp_B_800H

```
Function wsp_B_800H(ByVal T As Double) As Double 'T=500-1100
Dim A, B, C, D, E, a1, b1, c1, d1, V, X, Y, f1, f2, f3, f4 As Double
```

```
A = -0.594141000594801
B = 1.80992902088585E-03
C = -4.18496627199923E-06
D = 8.93930960921837E-09
E = -1.59906766150074E-11
a1 = 800
b1 = 800
c1 = 800
d1 = 800
```

$$\begin{aligned} V &= 35000 \\ X &= 27500 \\ Y &= 25714.2857142857 \end{aligned}$$

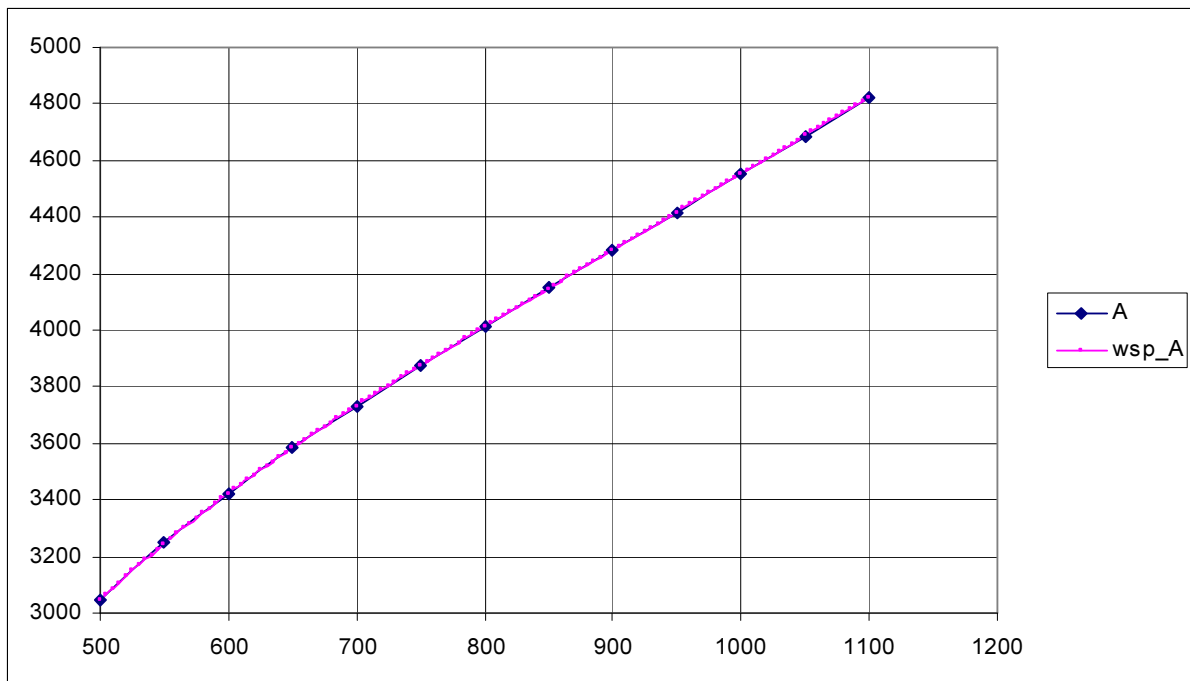
(40)

```

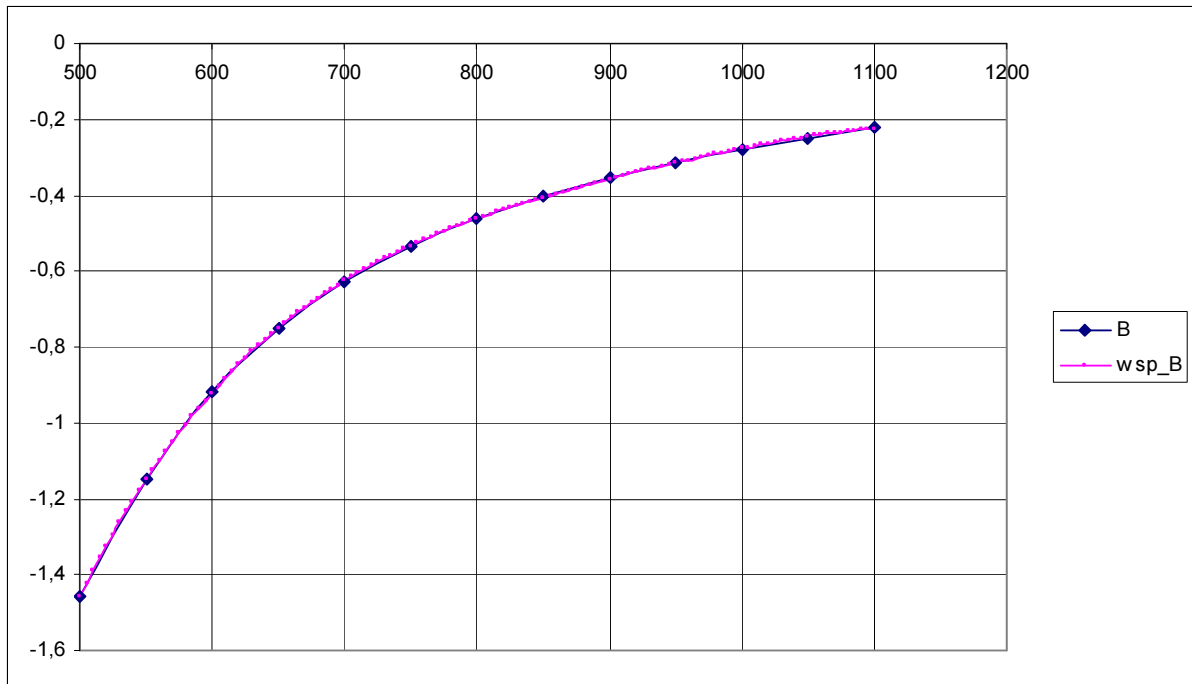
f1 = (T - a1)
f2 = (T - b1) * f1 - V
f3 = (T - c1) * f2 - X * f1
f4 = (T - d1) * f3 - Y * f2
wsp_B_800H = A + B * f1 + C * f2 + D * f3 + E * f4
End Function

```

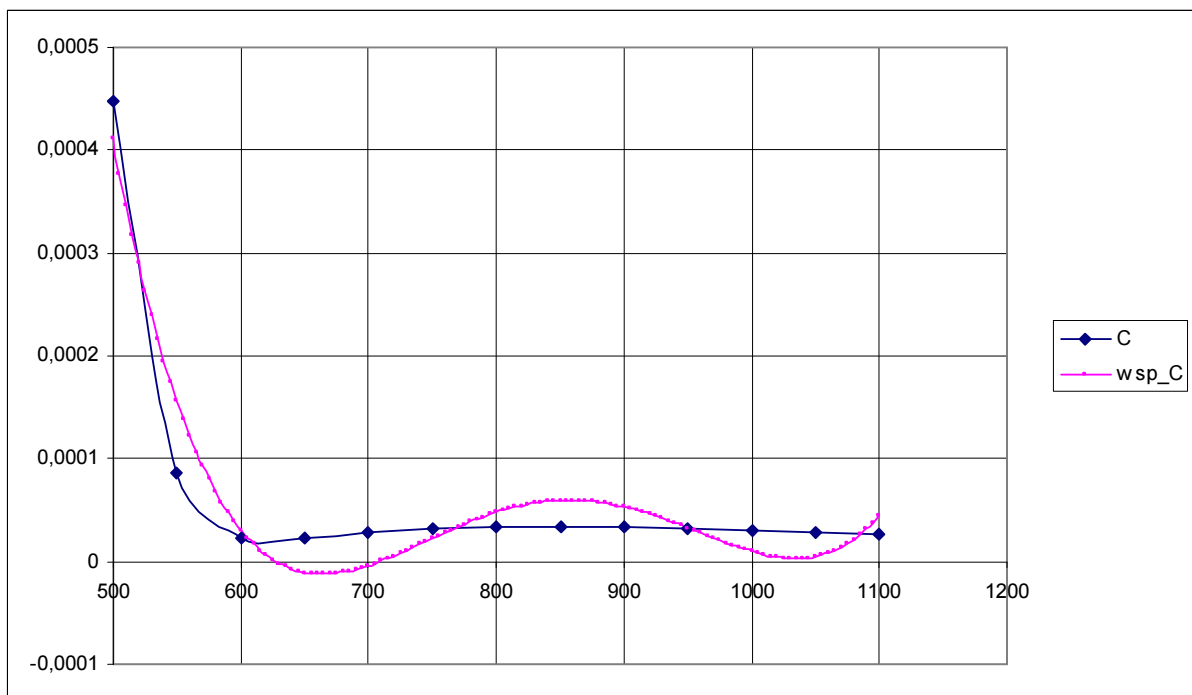
Graficzne porównanie wyników obliczeń tych 5-ciu funkcji z wartościami współczynników przedstawia się następująco:



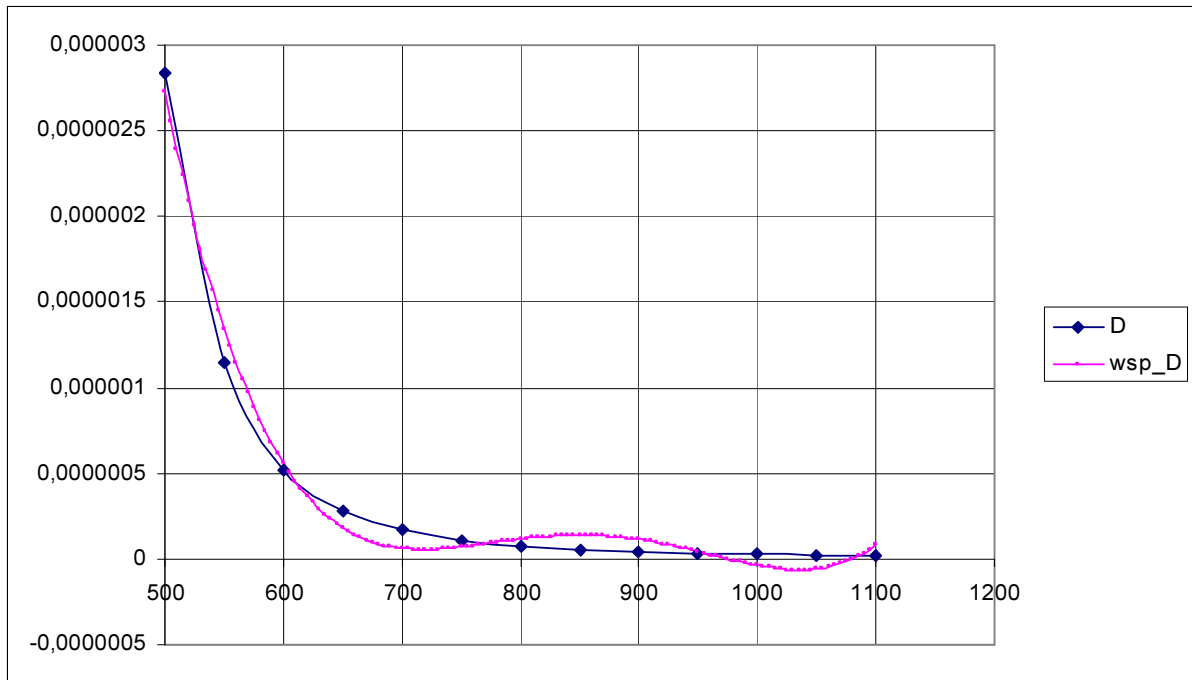
Rys. 41 Wykres porównawczy współczynnika A i funkcji wsp_A_800H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



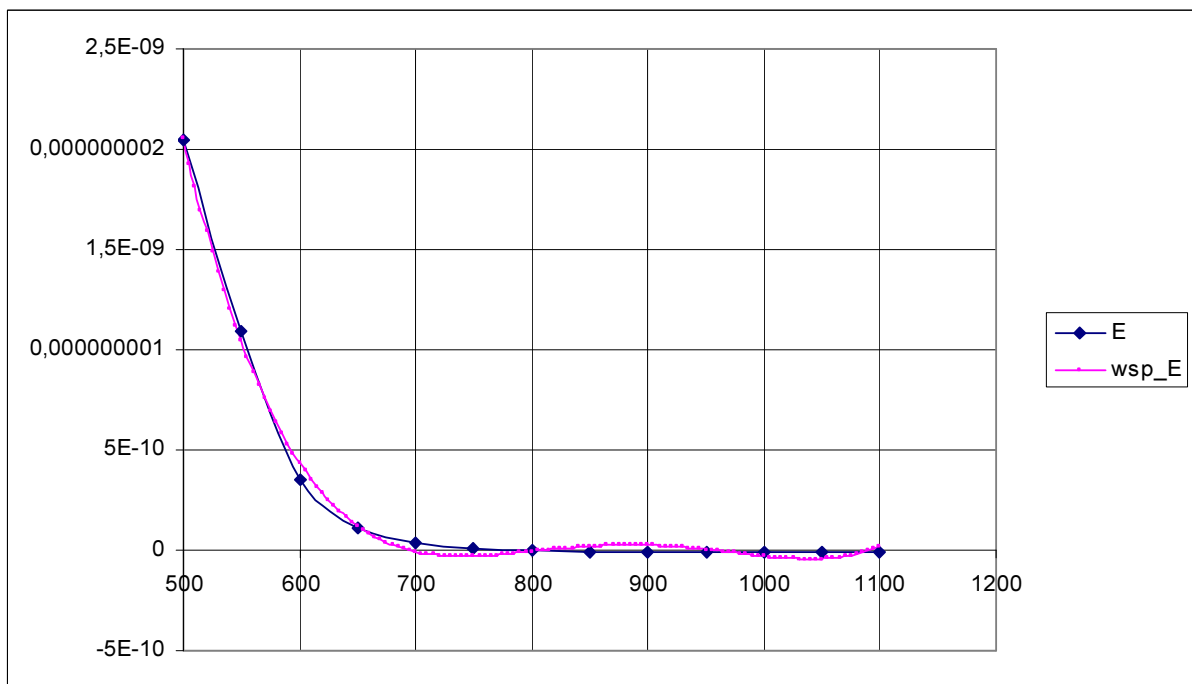
Rys. 42 Wykres porównawczy współczynnika B i funkcji wsp_B_800H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 43 Wykres porównawczy współczynnika C i funkcji wsp_C_800H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 44 Wykres porównawczy współczynnika D i funkcji wsp_D_800H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 45 Wykres porównawczy współczynnika E i funkcji wsp_E_800H aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)

Wykorzystując funkcje aproksymujące współczynniki zbudowałem ostateczną funkcję entalpii dla tego zakresu której listing przedstawiam poniżej:

```
Function Ent_800H(ByVal T As Double, ByVal P As Double) As Double
Dim A, B, C, D, E, a1, b1, c1, d1, V, X, Y, f1, f2, f3, f4 As Double
```

$A = \text{wsp_A_800H}(T)$
 $B = \text{wsp_B_800H}(T)$
 $C = \text{wsp_C_800H}(T)$
 $D = \text{wsp_D_800H}(T)$
 $E = \text{wsp_E_800H}(T)$
 $a1 = 320$
 $b1 = 497.424483306836$
 $c1 = 475.649612765146$
 $d1 = 397.270821885866$
 $V = 71885.7142857143$
 $X = 35166.4759574607$
 $Y = 32231.8097503346$

(41)

$f1 = (P - a1)$
 $f2 = (P - b1) * f1 - V$
 $f3 = (P - c1) * f2 - X * f1$
 $f4 = (P - d1) * f3 - Y * f2$
 $\text{Ent_800H} = A + B * f1 + C * f2 + D * f3 + E * f4$

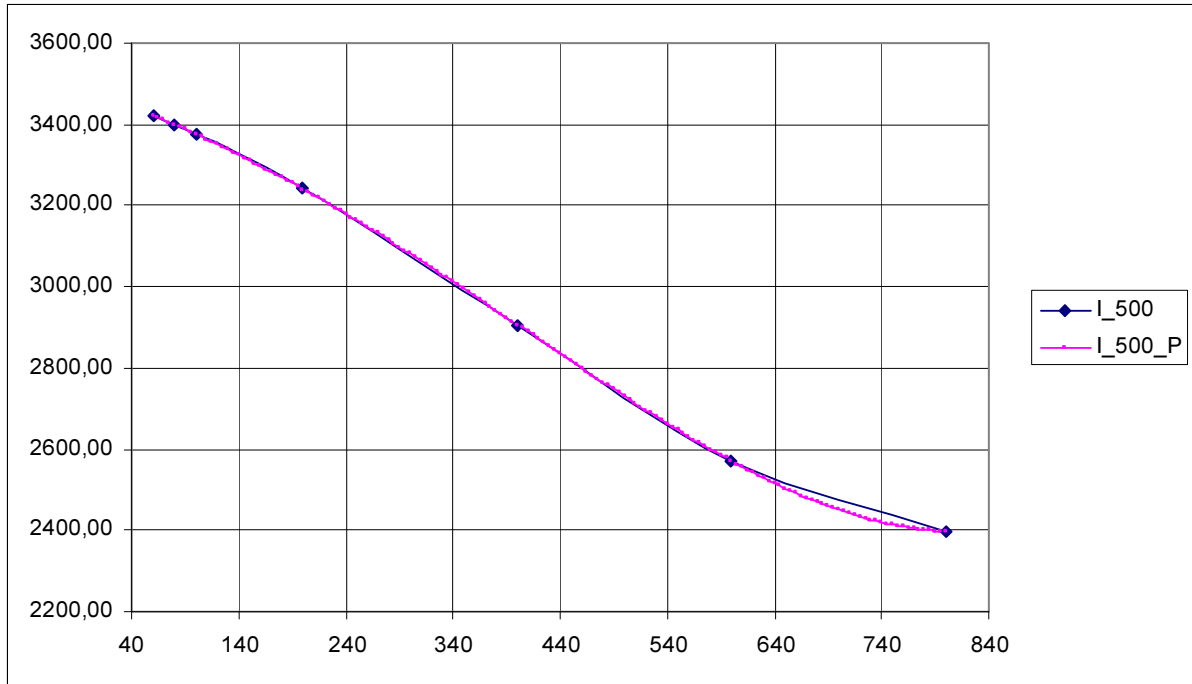
End Function

Największy błąd bezwzględny między wartościami tablicowymi a funkcjami aproksymującymi izotermy otrzymałem dla izotermy I_500_P w punkcie 100 bar i wynosi on $\Delta = -0,82 \text{ kJ/kg}$ co daje w tym punkcie błąd względny rzędu $\Delta\% = 0,82 / 3375,95 = 0,02\%$ Błąd widoczny w poniższej tabelce:

P_i	I_500	$T_i(4)$		I_500_P	r	Ent_80_110	500
60	3423,11	3422,45401	3044,734815 A				
80	3399,49	3399,762648	-1,45942494 B	3422,45401	0,66	3422,625916	-0,17
100	3375,13	3375,951945	0,000447106 C	3399,762648	-0,27	3399,864267	-0,10
200	3241,18	3240,566462	2,83372E-06 D	3375,951945	-0,82	3376,045904	-0,09
400	2906,49	2906,742623	2,04824E-09 E	3240,566462	0,61	3241,373914	-0,81
600	2570,31	2570,216237	320 a1	2906,742623	-0,26	2910,615669	-3,87
800	2397,43	2397,449783	497,4244833 b1	2570,216237	0,10	2574,997683	-4,78
2240	21313,14	21313,14371	475,6496128 c1	2397,449783	-0,02	2395,893889	1,56
α_n		1,639146464	397,2708219 d1				
β_n			71885,71429 V				
λ_n			35166,47596 X				-0,02%
			32231,80975 Y				

Rys. 46 Tabelka zależności entalpii od ciśnienia dla 500°C współczynniki oraz błąd bezwzględny aproksymacji dla izotermy I_500_P i funkcji ostatecznej Ent_800H (opracowanie własne)

Graficzne porównanie wartości izotermy I_500_P z wartościami tablicowymi wygląda tak:



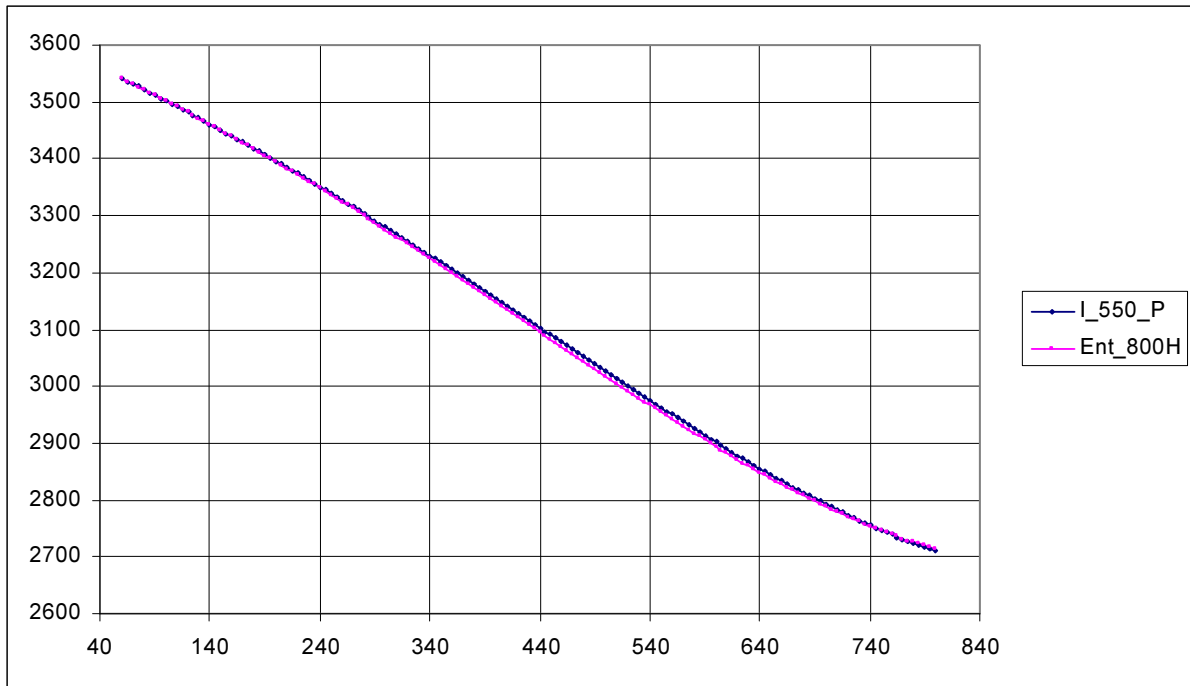
Rys. 47 Wykres porównawczy entalpii dla punktów izotermi I_350(P) i funkcji I_250_P (opracowanie własne)

Natomiast największy błąd względny między wartościami izoterm i ostateczną funkcją aproksymującą entalpię otrzymałem dla tej samej izotermi I_550_P w punkcie P = 600 bar i wynosi on $\Delta = 7,98$ kJ/kg co daje w tym punkcie błąd względny rzędu $\Delta\% = 7,98 / 2901,85 = 0,28\%$. Błąd widoczny w poniższej tabelce:

P _i	I_550	T _i (4)		I_550_P	r	Ent_80_110	550
60	3541,29	3541,275291	-1,149303636 B	3541,275291	0,02	3540,954072	0,32
80	3521,84	3521,838855	8,66461E-05 C	3521,838855	0,00	3521,681998	0,16
100	3501,96	3501,986124	1,15196E-06 D	3501,986124	-0,03	3501,865889	0,12
200	3396,14	3396,121548	1,09102E-09 E	3396,121548	0,02	3394,692852	1,43
400	3154,43	3154,435822	320 a1	3154,435822	-0,01	3147,465389	6,97
600	2901,85	2901,851317	497,4244833 b1	2901,851317	0,00	2893,867268	7,98
800	2709,88	2709,878353	475,6496128 c1	2709,878353	0,00	2713,881156	-4,00
2240	22727,39	22727,38731	397,2708219 d1				
α_n		0,001449265	71885,71429 V				0,28%
β_n			35166,47596 X				
λ_n			32231,80975 Y				

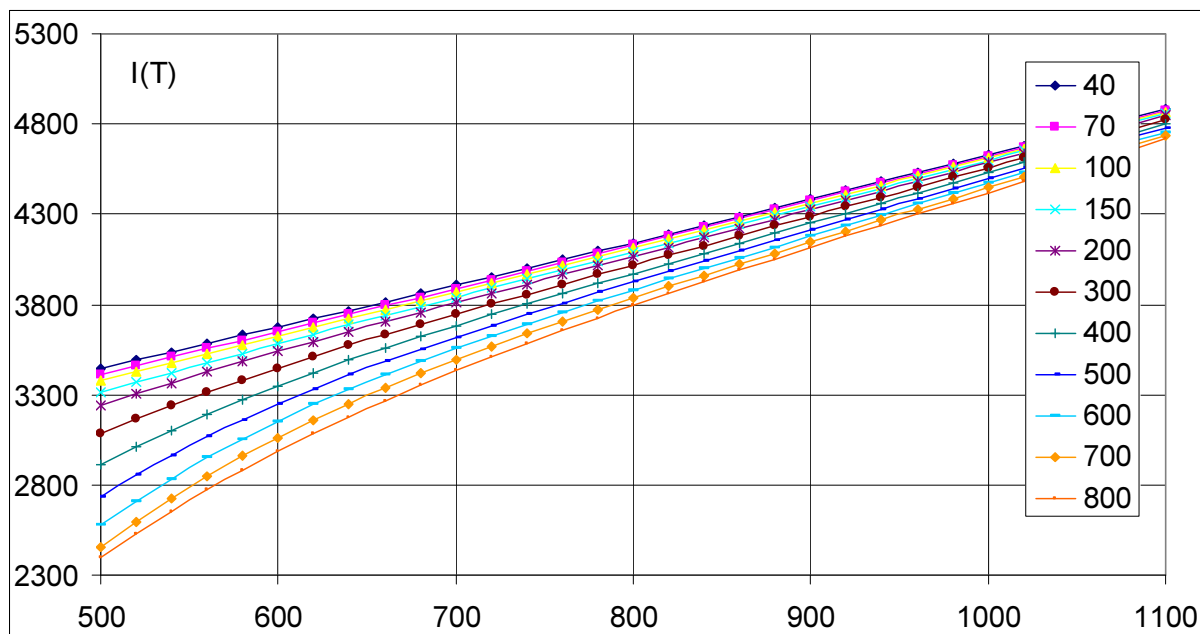
Rys. 48 Tabelka zależności entalpii od ciśnienia dla 550°C współczynniki oraz błąd bezwzględny aproksymacji dla izotermi I_550_P i funkcji ostatecznej Ent_800H (opracowanie własne)

Natomiast porównanie graficzne wartości izotermi I_550_P i wartości funkcji ostatecznej Ent_800H przedstawiam poniżej



Rys. 49 Wykres porównawczy entalpii dla punktów izotermy I_550_P i funkcji Ent_800H (opracowanie własne)

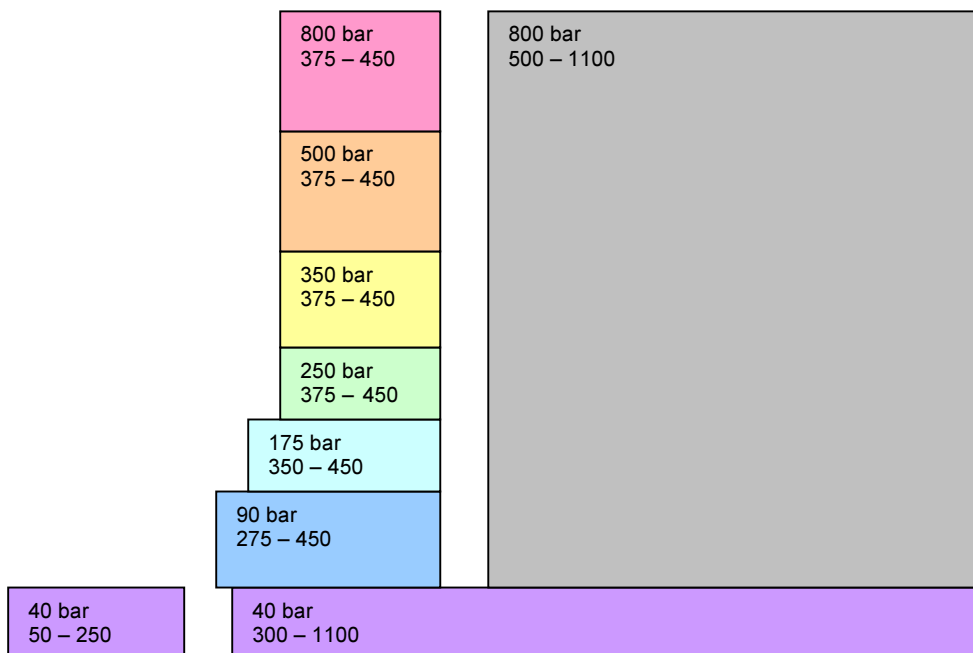
Za pomocą funkcji Ent_800H możemy zbudować tabelkę wartości entalpii dla izobar z zakresu 40 – 800 bar i przedstawić je na wykresie.



Rys. 50 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_800H dla zakresu argumentów z przedziału 40-800 bar i 500-1100°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)

2.4 Budowa funkcji aproksymującej entalpię pary wodnej nasyconej w zakresie ciśnień od 40 do 800 bar przy temperaturach niższych od 500°C

Zakres ciśnień od 40 do 800 bar przy temperaturach mniejszych od 500°C charakteryzuje się tak dużym zróżnicowaniem że musiałem podzielić go na 6 oddzielnych podzakresów aby odwzorować rzeczywiste zachowanie się entalpii pary wodnej. Ciśnienia poszczególnych zakresów zachodzą na siebie tak aby końcowa funkcja płynnie mogła przechodzić między nimi natomiast prawostronna granica temperatury wynosi 450°C. Obliczeń wartości funkcji z przedziału między tą wartością a lewostronną granicą poprzedniej funkcji 500°C dokonywać będzie końcowy algorytm na zasadzie interpolacji liniowej. Podział o którym mowa ilustruje poniższy rysunek gdzie zaznaczyłem również te 3 zakresy dla których obliczenia wykonałem już wcześniej w poprzednich rozdziałach. W sumie więc zakresów tych jest 9 i dla każdego z nich będzie zbudowana oddzielna funkcja aproksymująca wartości entalpii z objętego nimi przedziału.



Rys. 51 Zakresy temperatur i ciśnień dla których budowane będą oddzielne funkcje aproksymujące entalpię każdy z zakresów opisany jest górną wartością ciśnienia i rozpiętością temperatur (opracowanie własne)

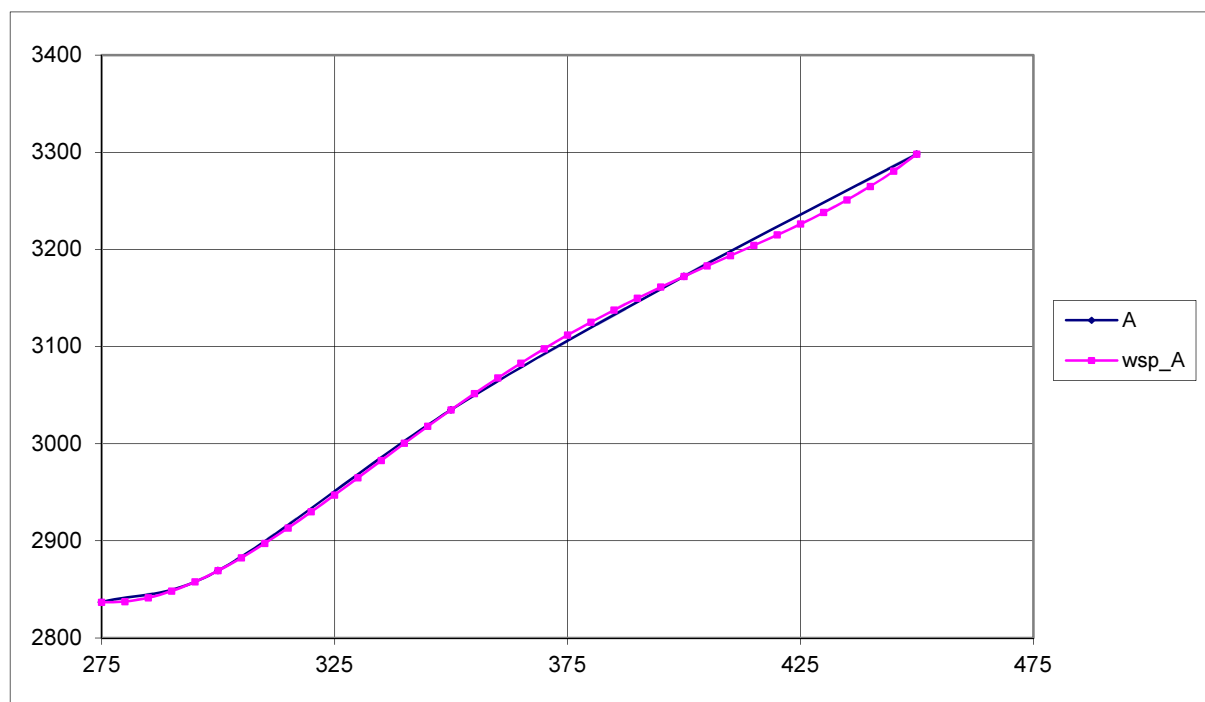
Poniżej przedstawiam przykładowe obliczenia dla zakresu 40 – 90 bar i 275 - 450°C

Po wprowadzeniu danych do tabelki aproksymujących entalpię dla poszczególnych izoterm (dla izoterm entalpia zależy jedynie od ciśnienia) tak jak to czyniłem w poprzednich rozdziałach otrzymałem współczynniki z których można zbudować wielomiany 4-go stopnia aproksymujące każdą z tych izoterm. Wielomianów tych już nie budowałem natomiast współczynniki zebrałem w poniższą tabelkę.

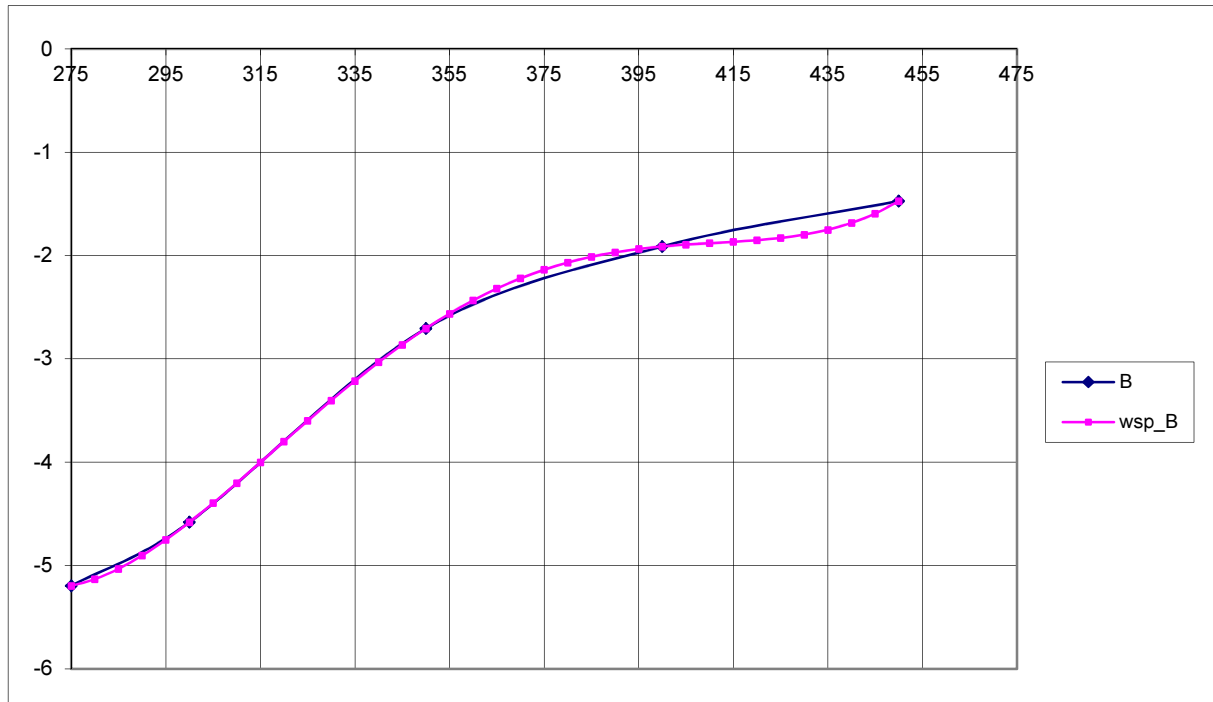
	A	B	C	D	E	a1	b1	c1	d1	V	X	Y
275	2836,84	-5,19729	-0,04545	-0,00096	-0,00011	49,884	49,54446	49,64693	50,08815	47,73382	32,04089	24,6776
300	2869,271	-4,58085	-0,03186	-0,00035	-4,9E-06	61,54429	64,26965	62,77448	61,56485	267,7803	138,762	145,6412
350	3034,914	-2,70573	-0,00827	-3,5E-05	2,53E-08	62,14286	66,96977	66,3145	63,25458	298,9796	182,4037	177,8442
400	3172,2	-1,91198	-0,00326	-7,8E-06	7,05E-08	62,14286	66,96977	66,3145	63,25458	298,9796	182,4037	177,8442
450	3298,186	-1,47229	-0,00166	-2,5E-06	1,17E-07	62,14286	66,96977	66,3145	63,25458	298,9796	182,4037	177,8442

Rys. 52 Tabelka współczynników (opracowanie własne)

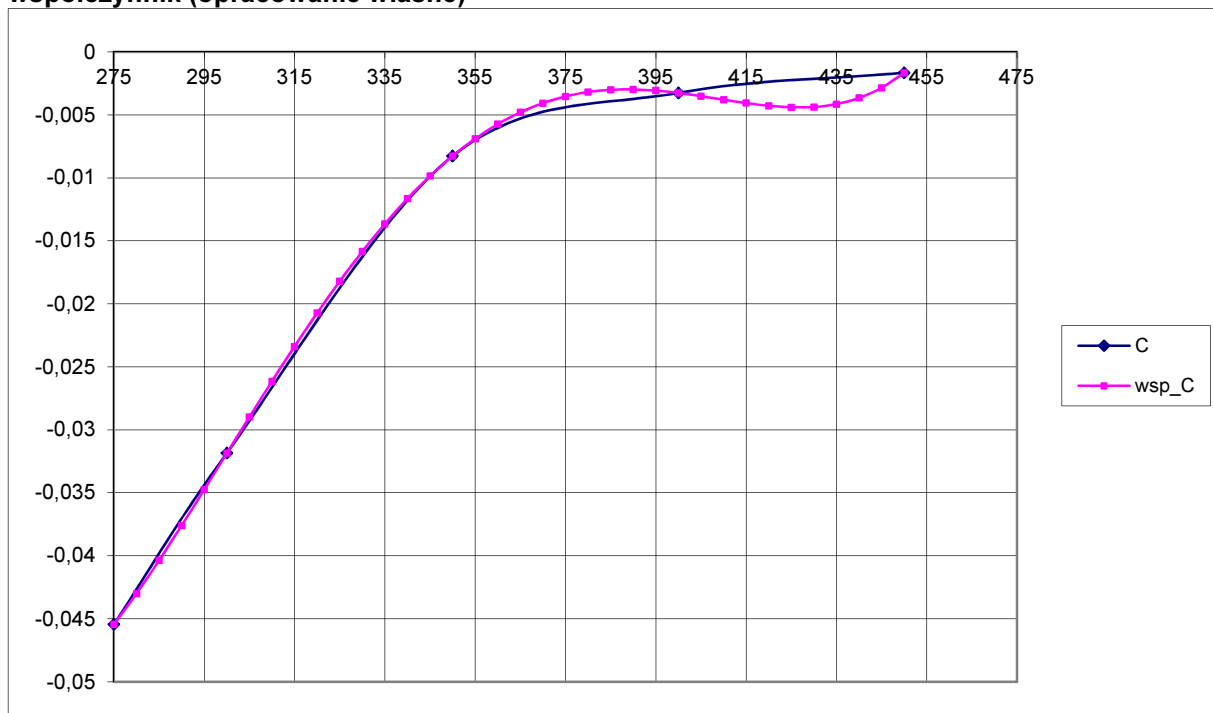
Jak widać każdy z tych współczynników wykazuje pewną zmienność w zależności od temperatury widocznej w pierwszej kolumnie tabelki. Tak więc każdy z tych współczynników wraz z opowiadającą mu temperaturą można dodać do tabelki aproksymacyjnej tak jak to czyniłem w poprzednich rozdziałach. Na podstawie każdej z tabelki aproksymacyjnych zawierających 5 par wartości temperatura – współczynnik utworzyć możemy wielomian aproksymacyjny 4 stopnia opisujący zmienność współczynnika w zależności od temperatury. Utworzyłem takie wielomiany i poniżej przedstawiam graficzne wyniki porównujące obliczone za ich pomocą wartości z wartościami z powyższej tabelki (Rys 50)



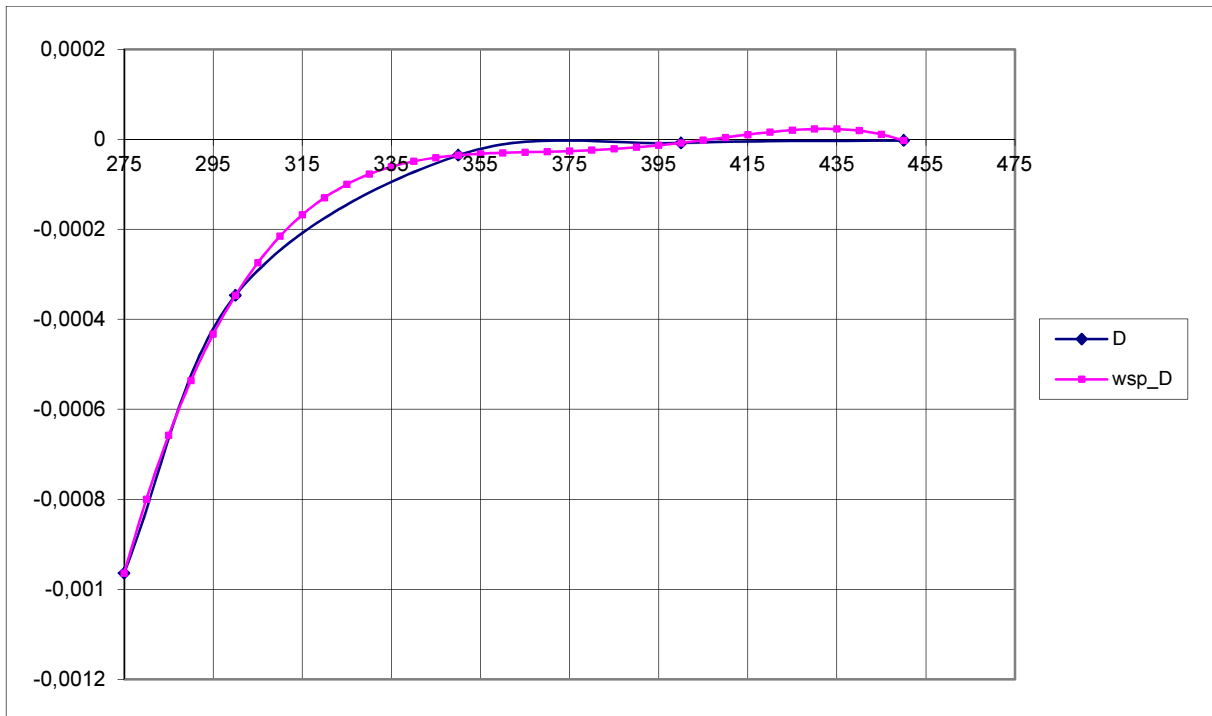
Rys. 53 Wykres porównawczy współczynnika A i funkcji wsp_A_90G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



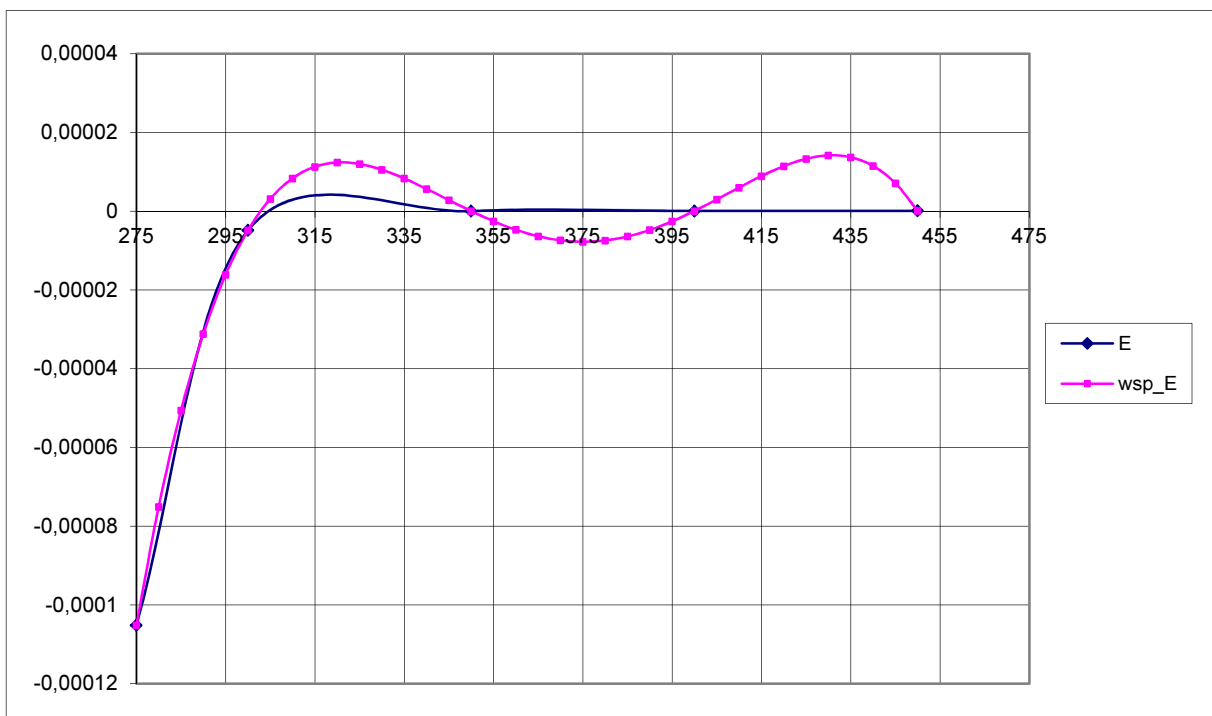
Rys. 54 Wykres porównawczy współczynnika B i funkcji wsp_B_90G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 55 Wykres porównawczy współczynnika C i funkcji wsp_C_90G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 56 Wykres porównawczy współczynnika D i funkcji wsp_D_90G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)



Rys. 57 Wykres porównawczy współczynnika E i funkcji wsp_E_90G aproksymującej ten współczynnik (opracowanie własne)

Mając zrobioną aproksymację współczynników (każdy z współczynników zależy od temperatury) możemy teraz na ich podstawie zbudować funkcję aproksymującą entalpię dodając zależność od ciśnień Listing takiej funkcji wygląda następująco:

```
Function Ent_90G(ByVal T As Double, ByVal P As Double) As Double
Dim A, B, C, D, E, a1, b1, c1, d1, V, X, Y, f1, f2, f3, f4 As Double
```

```
A = wsp_A_90G(T)
```

```
B = wsp_B_90G(T)
```

```
C = wsp_C_90G(T)
```

```
D = wsp_D_90G(T)
```

```
E = wsp_E_90G(T)
```

```
a1 = wsp_a1_90G(T)
```

```
b1 = wsp_b1_90G(T)
```

```
c1 = wsp_c1_90G(T)
```

```
d1 = wsp_d1_90G(T)
```

```
V = wsp_V_90G(T)
```

```
X = wsp_X_90G(T)
```

```
Y = wsp_Y_90G(T)
```

(42)

```
f1 = (P - a1)
```

```
f2 = (P - b1) * f1 - V
```

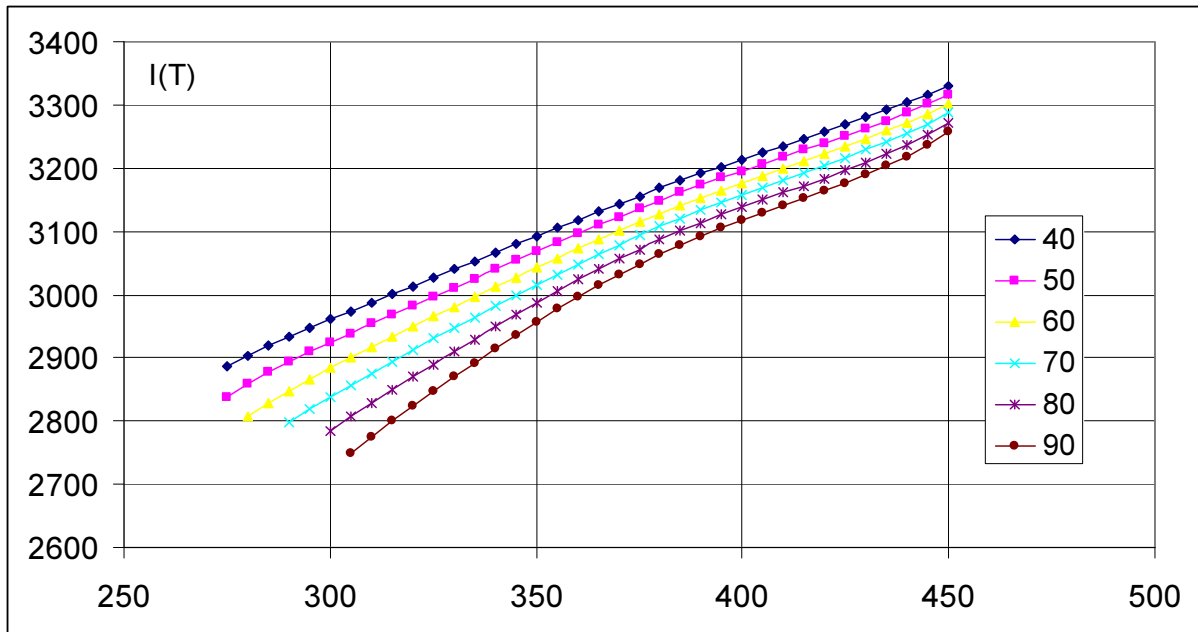
```
f3 = (P - c1) * f2 - X * f1
```

```
f4 = (P - d1) * f3 - Y * f2
```

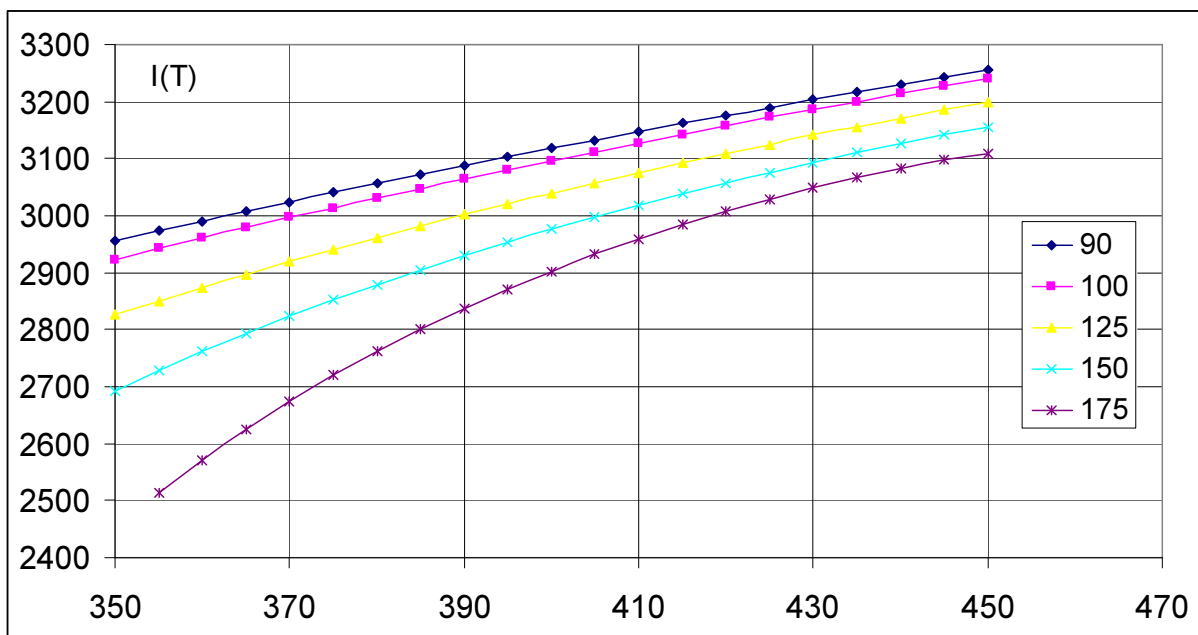
```
Ent_90G = A + B * f1 + C * f2 + D * f3 + E * f4
```

```
End Function
```

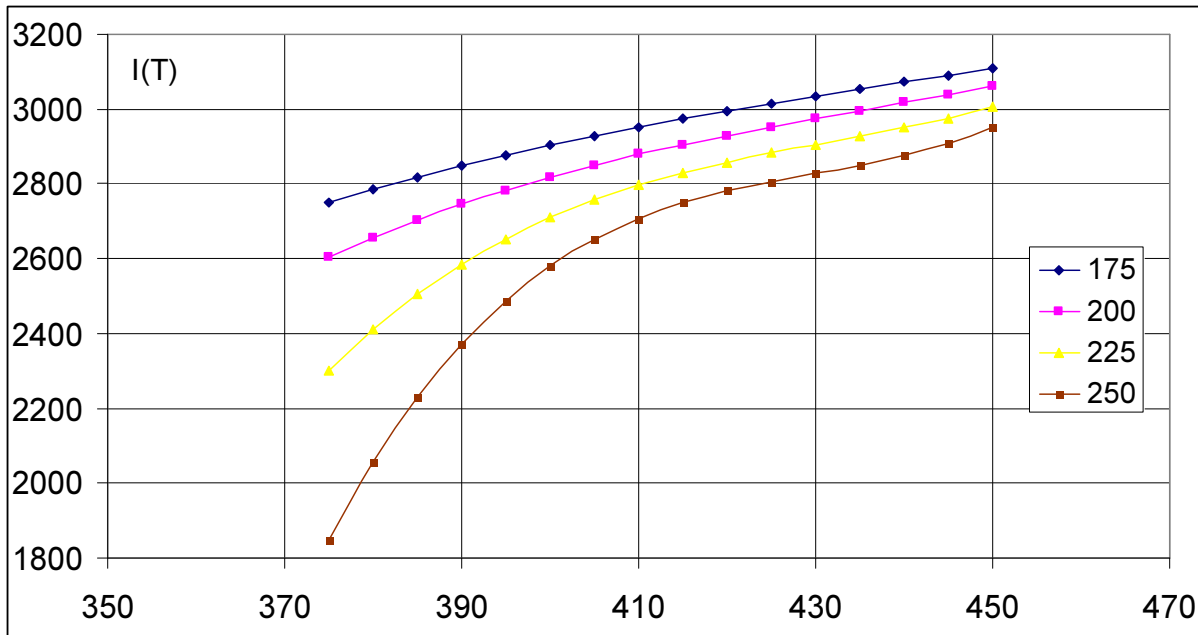
Dla pozostałych zakresów ciśnień budowa funkcji aproksymującej entalpię jest analogiczna jak dla zakresu opisanego powyżej nie będę więc tu ich wszystkich opisywał, pokażę jedynie końcowy efekt ich działania a mianowicie jak wyglądają wykresy entalpii dla izobar zbudowanych za pomocą tych funkcji



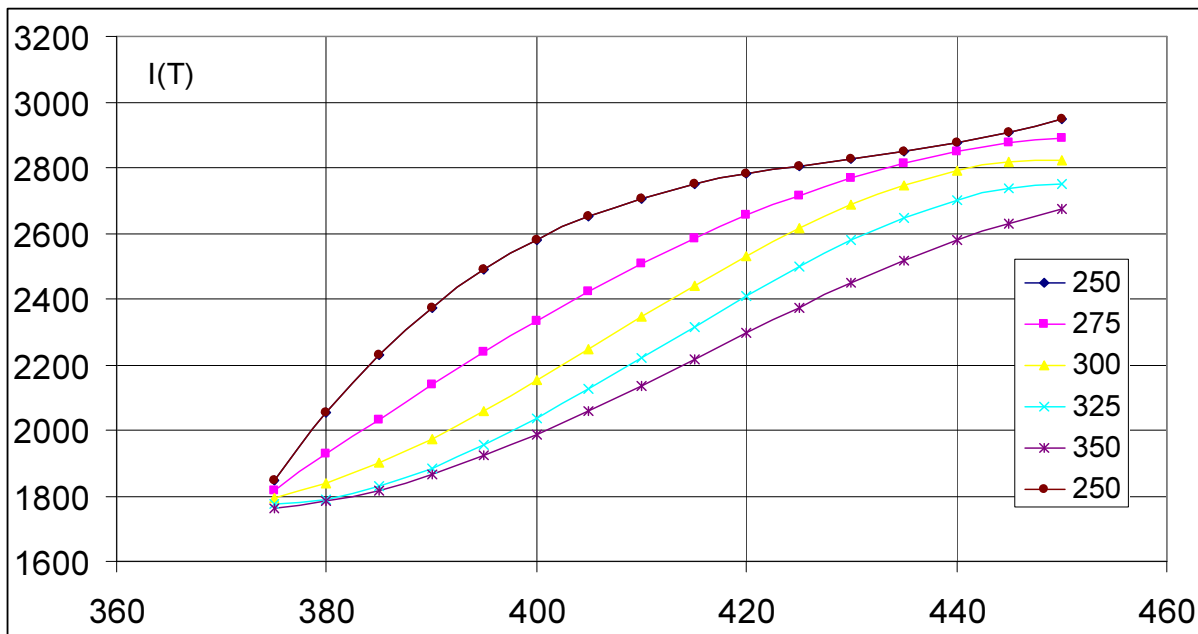
Rys. 58 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_90G dla zakresu argumentów z przedziału 40-90 bar i 275-450°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)



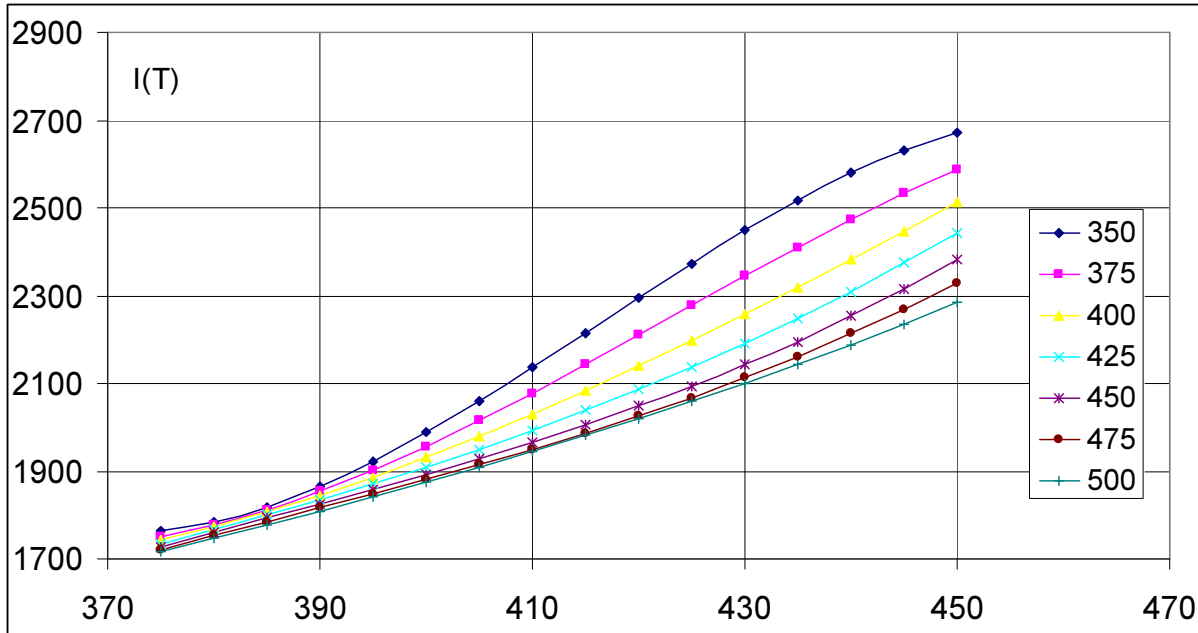
Rys. 59 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_175G dla zakresu argumentów z przedziału 90-175 bar i 350-450°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)



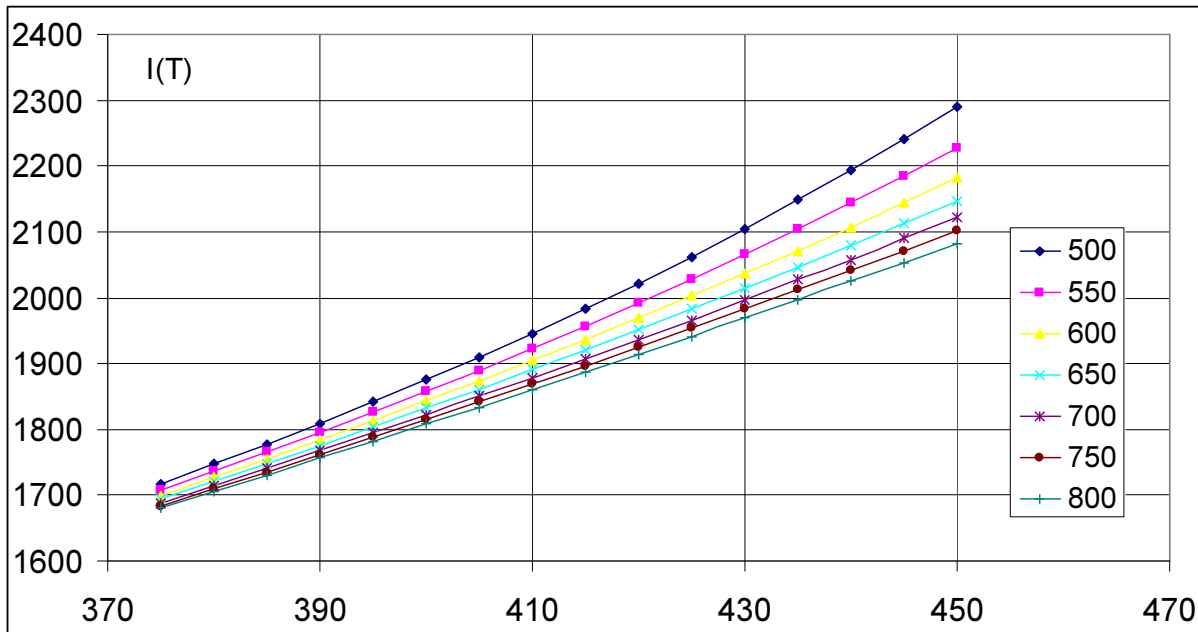
Rys. 60 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_250G dla zakresu argumentów z przedziału 175-250 bar i 375-450°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)



Rys. 61 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_350G dla zakresu argumentów z przedziału 250-350 bar i 375-450°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)



Rys. 62 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_500G dla zakresu argumentów z przedziału 350-500 bar i 375-450°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)



Rys. 63 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_800G dla zakresu argumentów z przedziału 500-800 bar i 375-450°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)

2.5 Budowa funkcji scalającej

Mając opisane powyżej 9 funkcji liczących entalpię dla każdego z 9-ciu zakresów temperatur i ciśnień muszą je teraz połączyć w jedną funkcję która będzie potrafiła dokonać wstępnej analizy danych i uruchomić odpowiednią funkcję składową a w razie potrzeby dokonać interpolacji wyników między 2-ma sąsiednimi funkcjami. Funkcja ta będzie musiała również ocenić czy dla podanej pary argumentów (temperatura, ciśnienie) mamy do czynienia z parą nasyconą a więc czy może podejmować dalsze obliczenia. Poniżej przedstawiam listing tej funkcji

```
Function Ent_TP(ByVal T As Double, ByVal P As Double) As Double
```

```
    If (T <= 374.14 And P > P_lwp_T(T)) Then
        Ent_TP = -2
        Exit Function
    End If
```

```
    If (P <= 40) Then
        If (T >= 50 And T <= 250) Then
            Ent_TP = Ent_40G(T, P)
            Exit Function
        End If
        If (T >= 300 And T <= 1100) Then
            Ent_TP = Ent_40H(T, P)
            Exit Function
        End If
        If (T > 250 And T < 300) Then
            Ent_TP = Ent_40G(250, P) + (Ent_40H(300, P) - Ent_40G(250, P)) * (T - 250) / 50
            Exit Function
        End If
    End If
```

```
    If (P > 40 And P <= 90) Then
        If (T <= 450) Then
            Ent_TP = Ent_90G(T, P)
            Exit Function
        End If
        If (T >= 500 And T <= 1100) Then
            Ent_TP = Ent_800H(T, P)
            Exit Function
        End If
        If (T > 450 And T < 500) Then
            Ent_TP = Ent_90G(450, P) + (Ent_800H(500, P) - Ent_90G(450, P)) * (T - 450) / 50
            Exit Function
        End If
    End If
```

```
    If (P > 90 And P <= 175) Then
        If (T <= 450) Then
            Ent_TP = Ent_175G(T, P)
            Exit Function
        End If
```

```

If (T >= 500 And T <= 1100) Then
Ent_TP = Ent_800H(T, P)
Exit Function
End If
If (T > 450 And T < 500) Then
Ent_TP = Ent_175G(450, P) + (Ent_800H(500, P) - Ent_175G(450, P)) * (T - 450) / 50
Exit Function
End If
End If

```

```

If (P > 175 And P <= 250) Then
If (T <= 450) Then
Ent_TP = Ent_250G(T, P)
Exit Function
End If
If (T >= 500 And T <= 1100) Then
Ent_TP = Ent_800H(T, P)
Exit Function
End If
If (T > 450 And T < 500) Then
Ent_TP = Ent_250G(450, P) + (Ent_800H(500, P) - Ent_250G(450, P)) * (T - 450) / 50
Exit Function
End If
End If

```

```

If (P > 250 And P <= 350) Then
If (T <= 450) Then
Ent_TP = Ent_350G(T, P)
Exit Function
End If
If (T >= 500 And T <= 1100) Then
Ent_TP = Ent_800H(T, P)
Exit Function
End If
If (T > 450 And T < 500) Then
Ent_TP = Ent_350G(450, P) + (Ent_800H(500, P) - Ent_350G(450, P)) * (T - 450) / 50
Exit Function
End If
End If

```

```

If (P > 350 And P <= 500) Then
If (T <= 450) Then
Ent_TP = Ent_500G(T, P)
Exit Function
End If
If (T >= 500 And T <= 1100) Then
Ent_TP = Ent_800H(T, P)
Exit Function
End If
If (T > 450 And T < 500) Then
Ent_TP = Ent_500G(450, P) + (Ent_800H(500, P) - Ent_500G(450, P)) * (T - 450) / 50
Exit Function
End If
End If

```

```

If (P > 500 And P <= 800) Then
If (T <= 450) Then
Ent_TP = Ent_800G(T, P)
Exit Function
End If

```

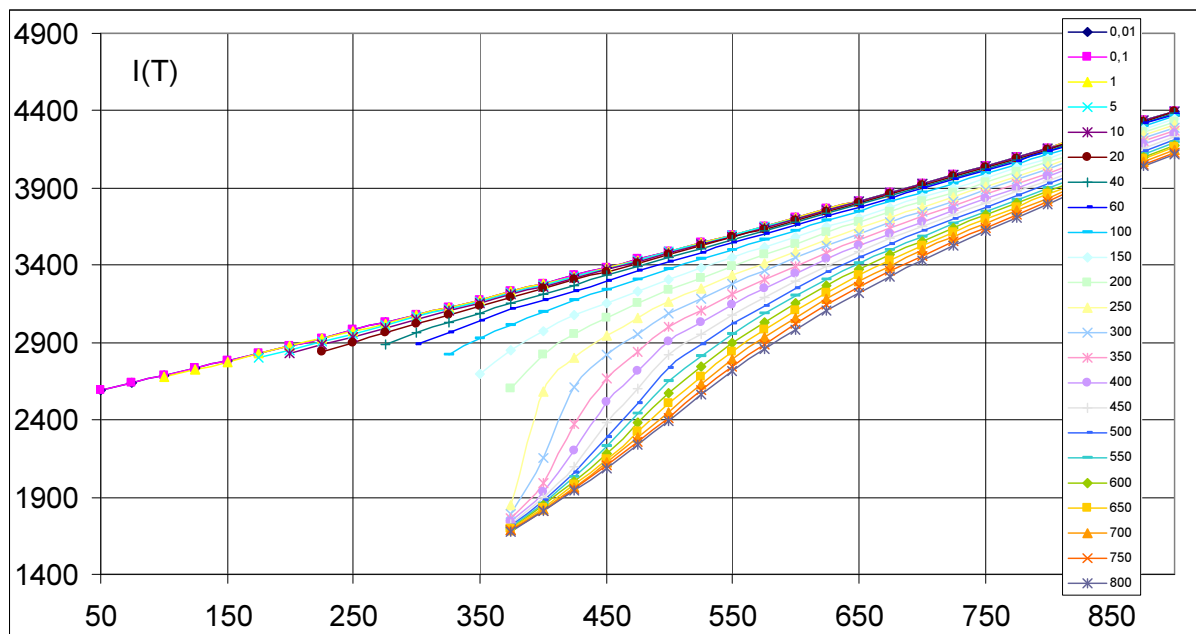
```

If (T >= 500 And T <= 1100) Then
Ent_TP = Ent_800H(T, P)
Exit Function
End If
If (T > 450 And T < 500) Then
Ent_TP = Ent_800G(450, P) + (Ent_800H(500, P) - Ent_800G(450, P)) * (T - 450) / 50
Exit Function
End If
End If
End Function

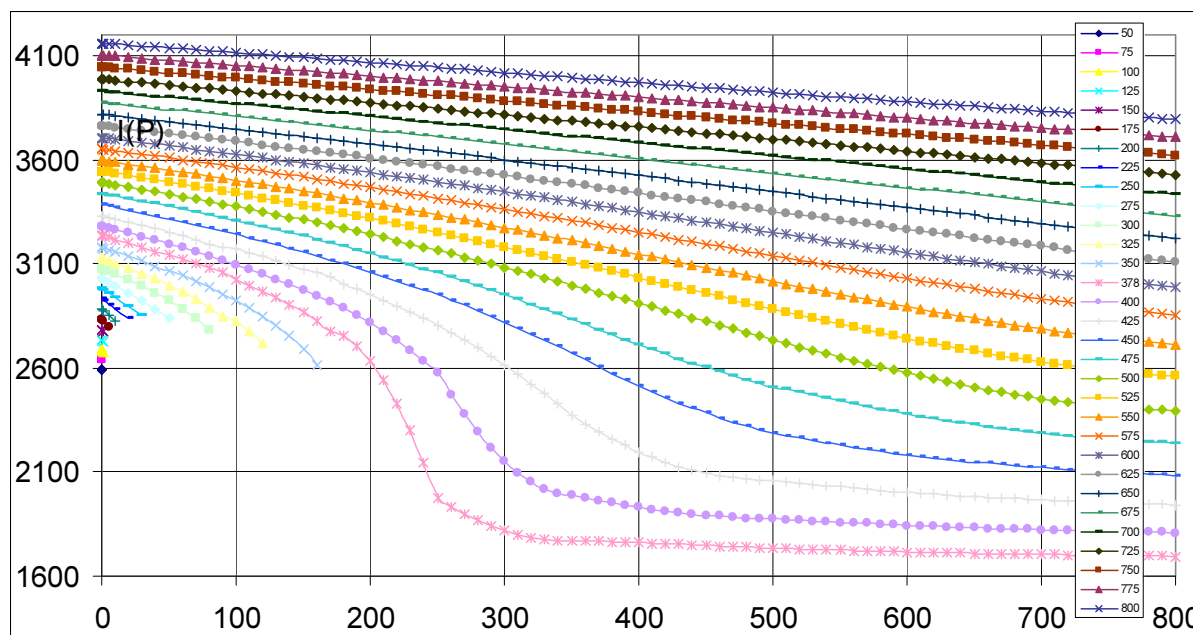
```

Mając taką funkcję scalającą Ent_TP możemy przeprowadzić analizę wszystkich danych i zbudować tabelę a na jej podstawie wykres dla całego zakresu temperatur i ciśnień.

Utworzyłem 2 takie tabele i na ich podstawie wykonałem dwa poniższe wykresy. Pierwszy dla izobar przedstawiający zależność entalpii od temperatury. Drugi dla izoterm przedstawiający zależność entalpii od ciśnienia,



Rys. 64 Wykres entalpii w zależności od temperatury zbudowany za pomocą funkcji Ent_TP dla zakresu argumentów z przedziału 0,01-800 bar i 50-1100°C linie na wykresie to izobary których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)



Rys. 65 Wykres entalpii w zależności od ciśnienia zbudowany za pomocą funkcji Ent_TP dla zakresu argumentów z przedziału 0,01-800 bar i 50-1100°C linie na wykresie to izotermy których wartości można odczytać w zamieszczonej po prawej stronie ramce (opracowanie własne)

3 Bibliografia i załączniki

Bibliografia:

1. „Termodynamika” – Jan Szargut - PWN W-wa 1975
2. „Termodynamika techniczna” – Stefan isniewski – WNT W-wa 1980
3. „Badanie kotła parowego” dr inż. Andrzej Tatarek - Zakład Miernictwa i Ochrony Atmosfery, Wro-cław, grudzień 2006r.
4. Porównanie metod określania własności termodynamicznych pary wodnej – prof. dr hab. Inż. Krzysztof Urbaniec – ZAP Politechnika Warszawska Wydz. BMiP, Płock 2002r
5. The International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS)
6. <http://www.fing.edu.uy/if/mirror/TEST/index.html>
7. Notatki własne i materiały z wykładów i ćwiczeń z całego toku studiów a w szczególności z przedmiotów „Metody numeryczne” oraz „Inteligentna analiza danych”

Załączniki:

Listing Funkcji Ent_TP i wszystkich funkcji składowych

ZAKOŃCZENIE

Zbudowana przeze mnie funkcja aproksymująca entalpię pary wodnej obejmuje zakres temperatur 50 - 1100°C i ciśnień 0,01 – 800 bar. Jak łatwo zauważyć w tabelce (Rys7) zakres danych pomiarowych jest w dziedzinie ciśnień większy i dochodzi do 10000 bar. Mógłbym oczywiście kontynuować swoje obliczenia i budować kolejne funkcje aproksymujące dla dalszych zakresów ciśnień. Jednak w zastosowaniach praktycznych (w energetyce) rzadko przekracza się granicę 200 bar tak więc przyjęta przeze mnie granica 800 bar jest i tak dużo powyżej tej wartości. We wspomnianej tabeli (Rys7) znaleźć można również dane nie tylko dla pary nasyconej lecz również dla wody dla której też można by oczywiście entalpię liczyć. Entalpia wody nie jest jednak aż tak mocno zmienna jak entalpia pary a dla stosunkowo niskich wartości ciśnień i temperatur panujących w rurociągach i węzłach ciepłowniczych którymi dostarczana jest ona do mieszkań jej wartość jest równa zawartej w niej energii cieplnej którą można liczyć wprost z temperatury. Biorąc powyższe pod uwagę sądzę że praca moja może mieć całkiem dobre zastosowanie praktyczne bez konieczności rozbudowy jej o kolejne moduły.